1 7. KATI CİSİMLERİN DÖNME HAREKETİ

- 7.1 Açısal Kinematik
- 7.2 Bir Kuvvetin Momenti (Tork)
- 7.3 Dönme Dinamiği
- 7.4 Eylemsizlik Momenti Hesapları
- 7.5 Yuvarlanma Hareketi
- 7.6 Açısal Momentum ve Korunumu

seçkin
Akademik ve
Mesleki Yayınlar

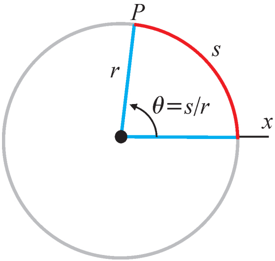
Daha iyi sonuç almak için, Adobe Reader programını **Tam Ekran** modunda çalıştırınız.
Sayfa çevirmek/Aşağısını görmek için, farenin sol/sağ tuşlarını veya PageUp/PageDown tuşlarını kullanınız.

7.1 AÇISAL KİNEMATİK

Katı cismin her noktası farklı hızda dönüyor olsa da, herbiri aynı açısal miktarda dönmektedir.

O halde, katı cisimler doğal olarak açısal koordinatlarla incelenirler.

Açısal Konum (θ):



r yarıçaplı dairesel yörüngede dönen bir P noktası.

Açıların başladığı bir **referans çizgisi** (x-ekseni).

P noktasının referans çizgisinden itibaren aldığı yol s yayı ise,

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(açısal konum)}$$

- Yaygın kabul: *Saat ibreleri tersi yönündeki açılar pozitif, diğer yöndekiler negatif alınır.*

- Açı birimi **radyan**:

$$\boxed{1 \text{ devir} = 360^\circ = 2\pi \text{ radyan}}$$

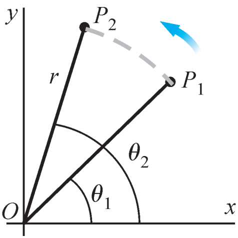
- Kinematikte doğal açı birimi radyandır. Çünkü $\theta = s/r$ bağıntısını doğrudan sağlar.

  Diğer derece $(^\circ)$ türünden birimler kullanmak yanlış sonuçlar verir.

- Bazı değerler:

$$180^\circ = \pi \text{ radyan}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radyan}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ radyan}$$

Açısal Hız:



r yarıçaplı çember üzerinde dönen P noktasının t_1 anındaki açısal konumu θ_1 ve daha sonraki bir t_2 anındaki açısal konumu θ_2 ise,

$$\omega_{\text{ort}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1}$$

oranına **ortalama açısal hız** denir. ▾

Birimi: radyan/saniye (rad/s). Sanayide kullanılan diğer birim: devir/dakika (rpm):

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ dev/dk} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} \approx 0.1 \text{rad/s}$$

Ani Açısal Hız (ω): Ortalama hızın limiti:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(açısal hız)}$$

Açısal İvme (α)

Açısal hızın birim zamandaki değişme miktarı.

$$\alpha_{\text{ort}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \text{(ortalama açısal ivme)}$$

Ani açısal ivme: Ortalama ivmenin $\Delta t \to 0$ limiti:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{(açısal ivme)}$$

Birimi: rad/s^2.

Sabit Açısal İvmeli Hareket

Açısal hız düzgün olarak değişiyorsa $\alpha = \text{sabit}$ olur.

Doğrusal harekette izlediğimiz yolla, açısal konum ve hız için formüller elde ederiz.

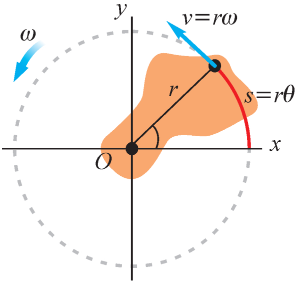
Sonuçları doğrusal hareket formülleriyle karşılıklı gösterelim:

Sabit ivmeli dönme ve öteleme hareketleri.

Dönme	Öteleme
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

Açısal ve Çizgisel Kinematik Arasındaki İlişki

Katı cismin dönme hareketinde, her noktanın çizgisel hız ve ivmesiyle, katı cismin açısal hız ve ivmesi arasındaki ilişki vardır.



- **Konumlar**: $s = r\,\theta$
- **Hızlar**:

  Her iki tarafın t zamanına göre türevi:

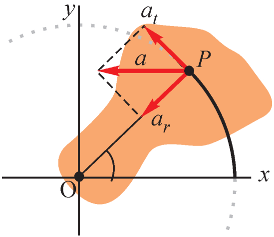
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

Sağ taraftaki türev **açısal hız**, sol taraftaki türev ise bildiğimiz **çizgisel hız** olur:

$$v = r\,\omega$$

Dairesel harekette ivmenin iki bileşeni vardı:

Teğetsel ve merkezcil ivmeler.



- **Merkezcil ivme** formülünü hatırlayalım: $a_r = v^2/r$

  Çizgisel hız için bulunan $v = r\omega$ ifadesi yerine konur:

$$a_r = \frac{(r\,\omega)^2}{r} = r\,\omega^2$$

- **Teğetsel ivme** formülünü hatırlayalım: $a_t = dv/dt$

  $v = r\omega$ ifadesini kullanıp koyup türev alındığında (r yarıçapı sabit),

$$a_t = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha \tag{2}$$

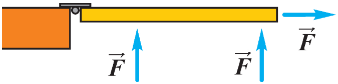
Sonuçların özeti:

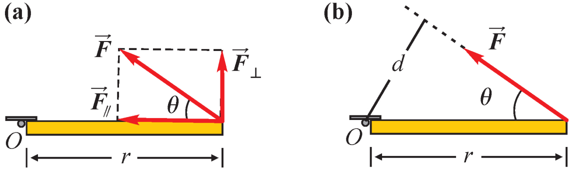
Açısal ve çizgisel kinematik arasındaki ilişki.

	Açısal	**Çizgisel**
Konum	θ	$s = r\,\theta$
Hız	ω	$v = r\,\omega$
İvme	α	$\begin{cases} a_r = r\,\omega^2 & \text{(merkezcil ivme)} \\ a_t = r\,\alpha & \text{(teğetsel ivme)} \end{cases}$

Bir kuvvetin cismi döndürme kabiliyetine **moment** (veya tork) adı verilir.

Bu F kuvvetlerinden hangisi kapıyı daha kolay döndürür?





Tanım: Orijinden r uzaklıkta etkiyen bir kuvvetin r doğrultusuyla yaptığı açı θ ise, F kuvvetinin O merkezine göre momenti,

$$\tau = F\,r\,\sin\theta$$

İki farklı hesap yöntemi:

$$\tau = \begin{cases} \underbrace{F\,\sin\theta}_{F_\perp}\,r = F_\perp\,r & \text{(Şekil a)} \\ F\,\underbrace{r\,\sin\theta}_{d} = F\,d & \text{(Şekil b)} \end{cases}$$

d uzaklığına **moment kolu** denir.

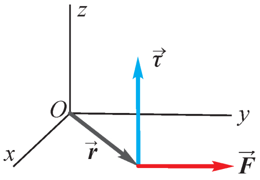
Momentin işareti: Kuvvetin döndürme yönüne bağlıdır:

Kuvvet, θ açısının pozitif alındığı yönde döndürüyorsa moment pozitif,

negatif yönde döndürüyorsa $\sin\theta$ ve dolayısıyla moment negatif olur.

Momentin Vektörel Çarpım Olarak İfadesi:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

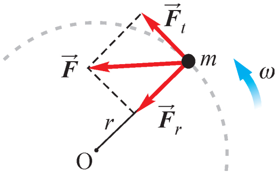


Şiddeti: $\tau = F\, r\, \sin\theta$

Yönü: $\vec{\boldsymbol{r}}$ ve $\vec{\boldsymbol{F}}$ vektörleri xy-düzleminde olsun.

Sağ-el kuralına göre: Kuvvetin döndürme yönü saat ibrelerine ters ise, moment $+z$ yönünde, yani pozitif olur.
Tersi yönde döndürüyorsa, moment negatif olur.

- **Noktasal Cismin Dönme Dinamiği**



$\vec{F}$ kuvvetinin etkidiği m kütlesi r yarıçaplı dairesel yörüngede dönüyor.

$\vec{F}$ kuvvetini teğetsel ve merkezcil bileşenleri için Newton yasası:

$$F_r = ma_r = mr\omega^2$$
$$F_t = ma_t = mr\alpha$$

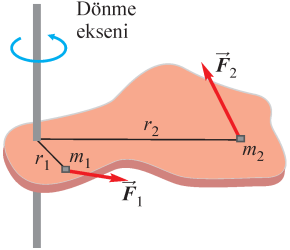
İkinci denklem r ile çarpılır:

$$F_t r = mr^2\alpha$$

Eşitliğin sol tarafı F kuvvetinin O merkezine göre momenti olur:

$$\tau = (mr^2)\alpha$$

Katı Cismin Dönme Dinamiği



O ekseni etrafında dönen katı cisim küçük $\Delta m_1, \Delta m_2 \ldots \Delta m_N$ kütlelerine ayrılır. Bu kütlelerin herbirine etkiyen dış kuvvetler $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_N$ (İç kuvvetler birbirini sıfırlar.)

Noktasal cisim için bulunan sonuç herbir kütle için yazılır:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= F_{1t}\, r_1 = (\Delta m_1 r_1^2)\, \alpha \\
\tau_2 &= F_{2t}\, r_2 = (\Delta m_2 r_2^2)\, \alpha \\
\cdots &= \cdots \\
\tau_N &= F_{Nt}\, r_N = (\Delta m_N r_N^2)\, \alpha
\end{aligned}$$

Taraf tarafa toplanır:

$$\begin{aligned}
\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N &= (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \Delta m_N r_N^2)\, \alpha \\
\sum_i \tau_i &= \Big(\sum_i \Delta m_i r_i^2\Big)\, \alpha
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\sum_i \tau_i}_{\tau_{\text{net}}} = \underbrace{\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right)}_{I} \alpha$$

τ_{net} : dış kuvvetlerin toplam momenti

I : Katı cismin **eylemsizlik momenti**

α : açısal ivme.

$$\boxed{\tau_{\text{net}} = I\,\alpha \qquad \text{(Katı cismin dönme dinamiği)}}$$

$F = ma$ ile benzerlik.

I kütle vazifesi görür.

7.4 EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESAPLARI

2 türlü hesaplanabilir:

- **Katı cisim noktasal kütlelerden oluşuyorsa**: $\Delta m_i = m_i$ ler toplanır:

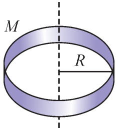
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

- **Sürekli dağılmış kütle**: $\Delta m_i \to 0$ limitinde, toplama integrale dönüşür:

$$I = \int dm\, r^2$$

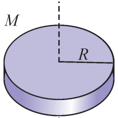
Bazı cisimlerin eylemsizlik momentleri

Halka : $I = MR^2$



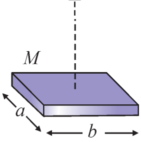
Disk veya silindir

$I = \frac{1}{2}MR^2$

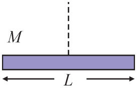


Dikdörtgen levha

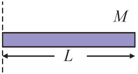
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



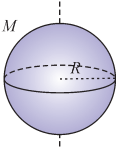
Çubuk : $I = \frac{1}{12}ML^2$



Çubuk : $I = \frac{1}{3}ML^2$



Küre : $I = \frac{2}{5}MR^2$

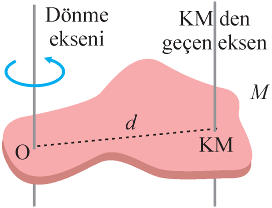


Paralel Eksenler Teoremi

Eylemsizlik momenti hangi eksene göre alındığına bağlıdır.

Tablodaki değerler kütle merkezine göre I_{KM} değerleridir.

Eğer, katı cisim başka bir eksen etrafında dönüyorsa,



Kütle merkezinden d uzaklıkta paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti,

$$I = I_{\text{KM}} + M\,d^2$$

Paralel eksenler (veya Steiner) teoremi denir.

Cismin eylemsizlik momentinin en küçük olduğu (yani en kolay dönebildiği) eksen, kütle merkezinden geçen eksendir.

Dönme Kinetik Enerjisi

Katı cisim N sayıda küçük $m_1, m_2 \ldots m_N$ kütlelerinden oluşsun.

Bu kütlelerin herbirinin çizgisel hızı $v_1, v_2 \ldots v_N$ olsun.

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_N v_N^2$$

Herbir kütle için $v_i = r_i \omega$ ilişkisi vardır:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_N (r_N \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} \Big[\underbrace{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_N^2}_{I} \Big] \omega^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{(dönme kinetik enerjisi)}}$$

$\frac{1}{2} m v^2$ ifadesiyle olan benzerliğe dikkat edelim.

7.5 YUVARLANMA HAREKETİ

Katı cisimlerin en genel hareketi: Dönme ve öteleme birlikte yer alırlar.

Her türlü hareket daima bu iki bileşene ayrılabilir:

- **Kütle merkezinin öteleme hareketi:**
  Bu hareket Newton yasasıyla belirlenir:

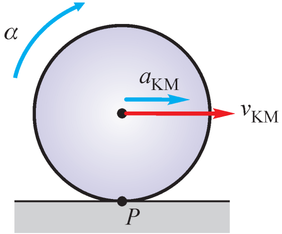
$$\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\mathrm{KM}} \qquad \text{(öteleme hareketi için)}$$

- **Kütle merkezi etrafında dönme hareketi:**
  Bu hareket dönme dinamiği yasasıyla belirlenir:

$$\sum_i \tau_{i,\mathrm{KM}} = I_{\mathrm{KM}}\,\alpha \qquad \text{(dönme hareketi için)}$$

En genel harekette çizgisel a_{KM} ile açısal α arasında bir ilişki yoktur.

En genel harekette a_{KM} ile α arasında bir ilişki yoktur.
Fakat, kaymadan yuvarlanan cisimde, bu iki ivme birbirine bağlıdır.



Eğer cisim kaymıyorsa, yüzeye değen P noktasının hızı daima sıfır olur.

Yüzeye değen bu nokta cismin **ani dönme ekseni** olur.

Bu eksenden R uzaklıktaki kütle merkezinin çizgisel ivmesi:

$$a_{KM} = R\alpha \qquad \text{(yuvarlanma koşulu)}$$

Yuvarlanma hareketinde kinetik enerji:

Dönme ve öteleme birlikte yeraldığı için, kinetik enerji her ikisinin toplamı olur:

$$K = \tfrac{1}{2} m v_{KM}^2 + \tfrac{1}{2} I_{KM}\, \omega^2 \qquad \text{(yuvarlanma kinetik enerjisi)}$$

7.6 AÇISAL MOMENTUM ve KORUNUMU

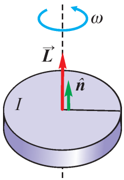
Öteleme hareketinde momentum $p = m\,v$ olarak tanımlanmıştı.
Benzer şekilde, dönme hareketinde açısal momentum tanımlanır:

$$\boxed{L = I\,\omega \qquad \text{(açısal momentum)}}$$

Birimi $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ olup, özel bir adı yoktur.

En basit durum: Hızı v olan noktasal cismin r uzaklıktaki dönme eksenine göre açısal momentumu:

$$L = I\omega = (mr^2)\,\omega = mvr \qquad \text{(noktasal cismin açısal momentumu)}$$



Gerçekte, açısal momentum vektörel bir niceliktir.
$\vec{p}$ momentum vektörünün torku olarak tanımlanır:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Yönü, cismin dönme düzlemine diktir.

Açısal momentumun korunumu:

Dönme hareketi denklemini yeniden yazalım:

$$\tau = I\,\alpha = I\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

Katı cisme etkiyen dış kuvvetlerin momenti sıfır ise, açısal momentum sabit kalır:

$$\tau = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dL}{dt} = 0$$

$$L_1 = L_2 = \text{sabit} \qquad\qquad \text{(açısal momentum korunumu)}$$

∗ ∗ ∗ 7. Bölümün Sonu ∗ ∗ ∗