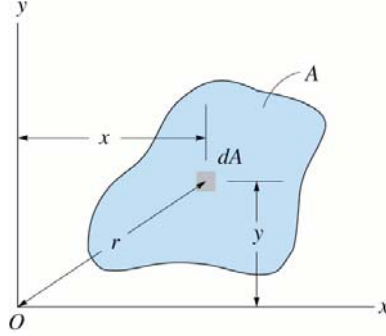


BÖLÜM 6

ALAN ve KÜTLE ATALET MOMENTLERİ

6.1 GİRİŞ VE TANIM

Atalet; direnim, karşı koyma anlamına gelmektedir. Bir cismin atalet momenti geometrik olarak dizaynda cismin (eğilme, burulma vb.) zorlanmalara karşı direncinin bir ölçütüdür.



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = I_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Şekil: 6.1

$$I_x = \int y^2 dA \longrightarrow A \text{ alanının } x \text{ ekseninde etrafında atalet momenti (ikinci momenti)}$$

$$I_y = \int x^2 dA \longrightarrow A \text{ alanının } y \text{ ekseninde etrafında atalet momenti}$$

$$I_O = \int r^2 dA \longrightarrow A \text{ alanının kutupsal atalet momenti}$$

$$I_{xy} = \int xy dA \longrightarrow A \text{ alanının çarpım atalet momenti}$$

$$I_O = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y = I_O$$

I_x , I_y ve I_O her zaman pozitifdir, $I_{xy} \pm$ olabilir. $I_x, I_y, I_O, I_{xy} = (L^4) \longrightarrow m^4, cm^4, mm^4$ 'dür.

6.1.1 ATALET YARI ÇAPLARI

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} > 0 \quad I_x \text{ için atalet yarı çapı}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} > 0 \quad I_y \text{ için atalet yarı çapı}$$

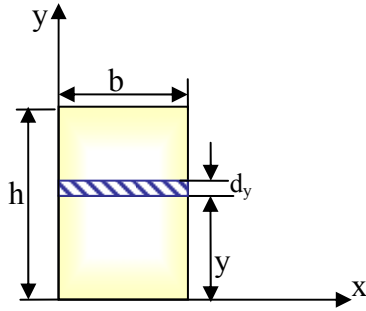
I_{xy} için atalet yarıçapı yoktur.

$$i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} > 0 \quad I_o \text{ için atalet yarı çapı}$$

$$i_o = \sqrt{\frac{I_x}{A} + \frac{I_y}{A}} = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}$$

$$i_x, i_y, i_o > 0 \quad (L) \quad (\text{mm, cm, m})$$

Örnek 6.1: Dikdörtgenin tabanından geçen eksene göre atalet momenti



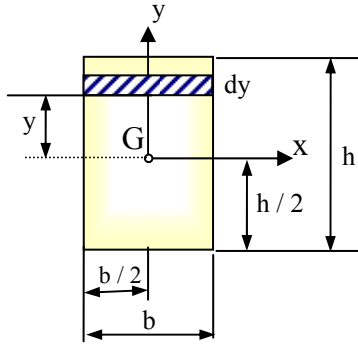
$$dA = b \cdot dy$$

$$I_x = \int y^2 dA = b \cdot \int_0^h y^2 dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

Örnek 6.2: Dikdörtgenin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti



$$I_x = \int y^2 dA \quad dA = b \cdot dy$$

$$I_x = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

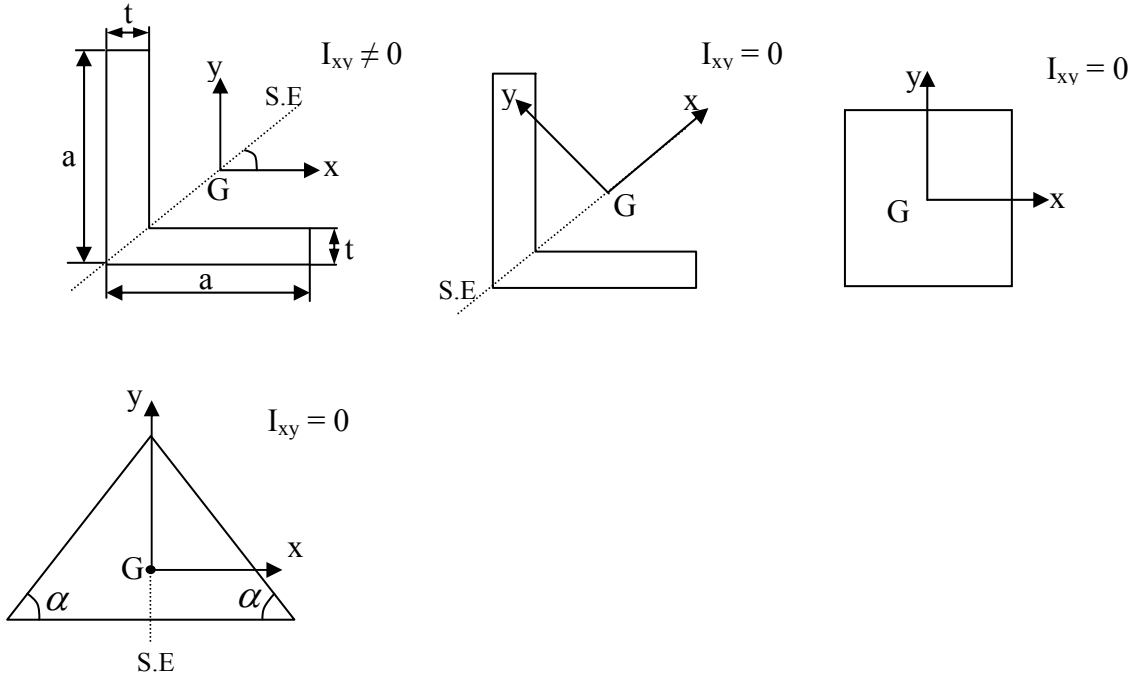
Benzer şekilde;

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

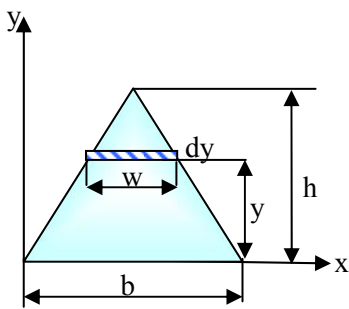
Cismin tabanından geçen eksene göre ve ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentleri farklıdır. Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti minimum atalet momentidir.

$$\text{Ağırlık merkezinde; } I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA = 0, \quad i_x = \sqrt{\frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{b \cdot h}{12}}} = \frac{h}{\sqrt{12}}, \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}, \quad i_o = \sqrt{\frac{h^2}{12} + \frac{b^2}{12}}$$

Eğer kesit bir simetri eksenine sahip ve xy eksen takımının eksenlerinden birisi bu simetri eksenine paralel seçilirse ve buna ek olarak xy eksen takımının orijini G ağırlık merkezinde ise kesitin çarpım atalet momenti $I_{xy} = 0$ 'dır. (SE: Simetri Eksen)



Örnek 6.3: Üçgenin alan atalet momentinin hesabı



$$I_x = \int y^2 dA \quad dA = w \cdot dy$$

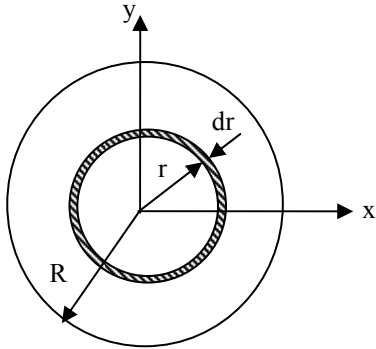
$$\frac{w}{b} = \frac{h-y}{h} \quad w = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \left(\frac{b}{h}h - \frac{b}{h}y \right) dy,$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{xG} = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 dA = \frac{bh^3}{36}$$

Örnek 6.4: Daire kesit için atalet momenti



$$dA = 2\pi r \cdot dr \quad I_o = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr$$

$$I_x = I_y \quad I_o = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_o = I_x + I_y$$

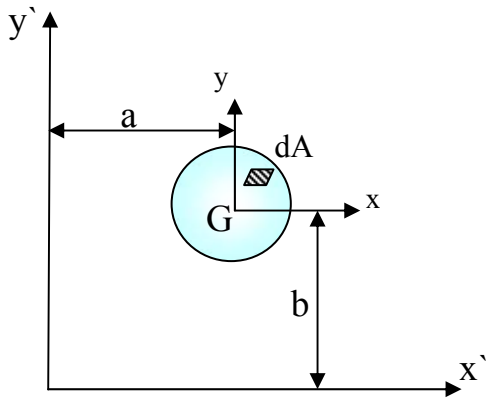
$$I_x = \frac{I_o}{2}$$

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} = I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \implies D = 2R \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64} = I_y$$

$$I_o = \frac{\pi R^4}{2} \implies D = 2R \quad I_o = \frac{\pi D^4}{32}$$

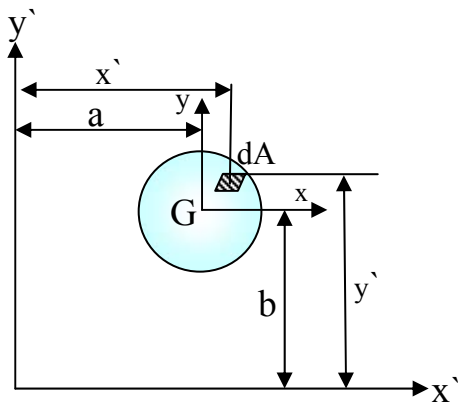
6.2 EKSENLERİN KAYDIRILMASI (PARALEL OLARAK)



$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA \\ I_y &= \int x^2 dA \\ I_{xy} &= \int xy dA \end{aligned} \right\} \text{biliniyor} \quad \begin{aligned} I_{x'} &= \int y'^2 dA \\ I_{y'} &= \int x'^2 dA \\ I_{x'y'} &= \int x'y' dA \end{aligned}$$

$$S_x = \int y \cdot dA = 0$$

$$S_y = \int x \cdot dA = 0$$



(a, b) G (x', y') takımındaki koordinatları

$$x' = a + x$$

$$y' = b + y$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$I_{x'} = \int (y + b)^2 dA$$

$$I_{x'} = \int (y^2 + 2yb + b^2) dA$$

$$I_{x'} = \int y^2 dA + 2b \int y \cdot dA + b^2 \int dA$$

$$I_{x'} = I_x + A \cdot b^2 > 0$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int (x+a)^2 dA$$

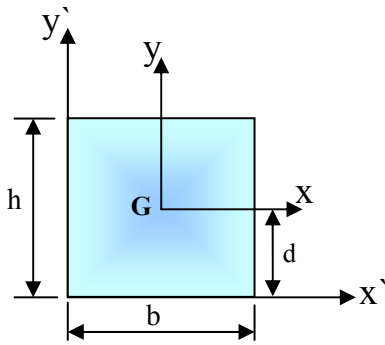
$$I_{y'} = I_y + a^2 \cdot A > 0$$

$$I_{x'y'} = \int x'y'dA$$

$$I_{x'y'} = \int (x+a)(y+b)dA = I_{xy} + a \cdot b \cdot A > 0$$

Bir cismin ağırlık merkezinden geçen eksenlere paralel herhangi bir eksene göre atalet momenti, cismin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti ile bu paralel iki eksen arasındaki uzaklığın karesinin, cismin alanıyla çarpımının toplamına eşittir.

Örnek 6.5: Paralel eksenler teoreminin uygulaması

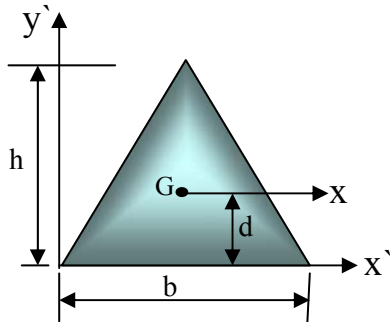


$$I_{x'} = I_{xG} + d^2 A$$

$$d = \frac{h}{2}$$

$$I_{x'} = \frac{b \cdot h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Örnek 6.6: Paralel eksenler teoreminin uygulaması

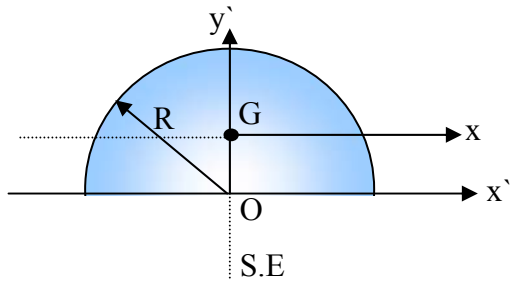


$$I_{x'} = I_{xG} + d^2 A$$

$$\frac{b \cdot h^3}{12} = I_{xG} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b \cdot h}{2}$$

$$I_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

Örnek 6.7: Yarım dairenin atalet momentinin hesabı



$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad (\text{Tüm daire})$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \quad (\text{Yarım daire})$$

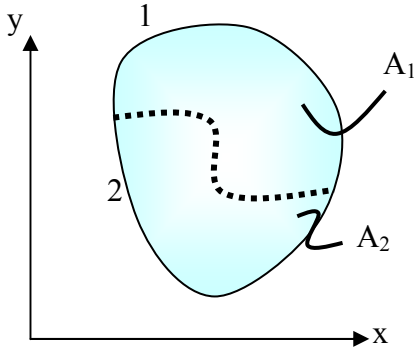
$$I_{x'} = I_{xG} + d^2 A$$

$$\frac{\pi \cdot R^4}{8} = I_{xG} + \left(\frac{4 \cdot R}{3\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

$$I_{xG} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} - \frac{16 \cdot R^4}{18\pi}$$

$$I_{xG} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \cdot \left[1 - \frac{64}{9\pi^2} \right]$$

6.3 BİLEŞİK CİSİMLERİN ATALET MOMENTLERİ



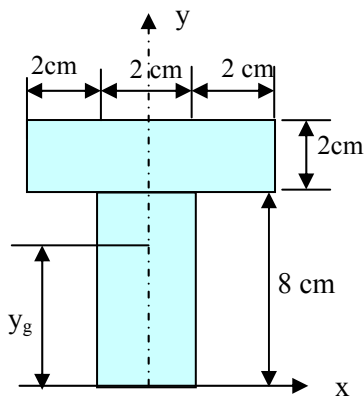
$$A = A_1 + A_2$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

Örnek 6.9



a) Verilen profil kesitte I_x , I_y ve I_{xy} atalet momentlerini

b) Cismin ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentleri

a..)

$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_x = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

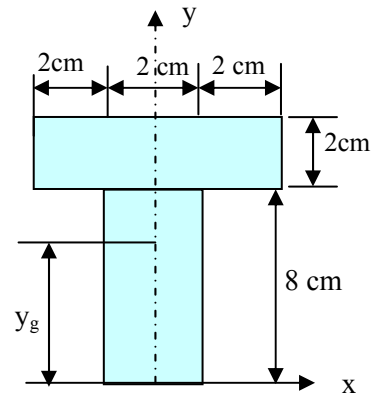
$$I_x = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 9^2 \cdot 12 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 4^2 \cdot 16 = 1317,33 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_y = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 41,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 9 \cdot 0 \cdot 12 + 4 \cdot 0 \cdot 16 = 0$$



b..)

$$x_g = 0$$

$$y_g = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{9 \cdot 12 + 4 \cdot 16}{12 + 16} = 6,14 \text{ cm}$$

$$I_{x'} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

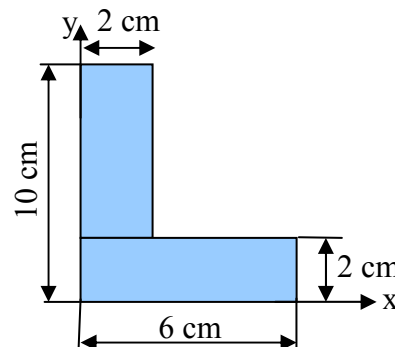
$$I_{x'} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + (9 - 6,14)^2 \cdot 12 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + (4 - 6,14)^2 \cdot 16 = 260,76 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_{y'} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 41,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$

Örnek 6.10: Verilen profil kesitin ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini hesaplayınız.



Çözüm:

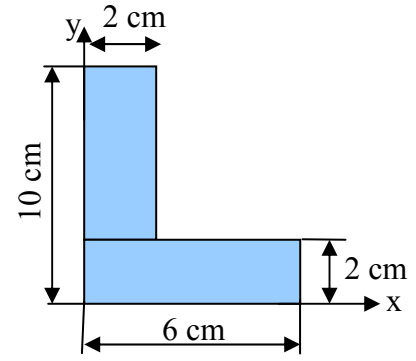
$$x_g = \frac{1 \cdot 16 + 3 \cdot 12}{16 + 12} \cong 1,85$$

$$y_g = \frac{6 \cdot 16 + 1 \cdot 12}{16 + 12} \cong 3,85$$

$$I_x' = \frac{2 \cdot 8^3}{12} + (6 - 3,85)^2 \cdot 16 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + (1 - 3,85)^2 \cdot 12 = 260,76 \text{ cm}^4$$

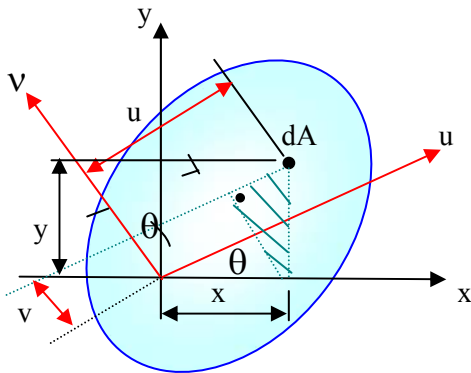
$$I_y' = \frac{8 \cdot 2^3}{12} + (1 - 1,85)^2 \cdot 16 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} + (3 - 1,85)^2 \cdot 12 = 68,76 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= I_{x_1y_1} + I_{x_2y_2} \\ &= x_1 \cdot y_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot y_2 \cdot A_2 \\ &= (1 - 1,85) \cdot (6 - 3,85) \cdot 16 + (3 - 1,85) \cdot (1 - 3,85) \cdot 12 \\ &= (-0,85) \cdot (2,15) \cdot 16 + (1,15) \cdot (-2,85) \cdot 12 \\ &= -68,57 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



6.4 EKSENLERİN DÖNDÜRÜLMESİ (ASAL EKSENLER VE ASAL ATALET MOMENTLERİ)

Atalet momentlerinin seçilen eksenlere göre yer aldıkları ve bu eksenlerin değişmesiyle tabii olarak değiştiklerini daha önce görmüştük. Şimdi eksenlerin döndürülmesi halinde atalet momentlerinin nasıl değiştiğini inceleyelim.



$$u = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$v = y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta$$

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta)^2 dA$$

$$I_u = \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA$$

$$1.) \quad I_u = I_x \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + I_y \cdot \sin^2 \theta$$

$$I_u = \int v^2 dA = \int (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta)^2 dA = \cos^2 \theta \int x^2 dA + 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \int x \cdot y \cdot dA + \sin^2 \theta \int y^2 dA$$

$$2.) \quad I_v = I_x \cdot \cos^2 \theta + 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + I_y \cdot \sin^2 \theta$$

$$3.) \quad I_{uv} = \int u \cdot v \cdot dA = \int (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)(y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta)$$

$$I_{uv} = I_x \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta - I_y \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + I_{xy} \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$2 \sin\theta \cdot \cos\theta = \sin 2\theta$$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ dönüşümleri yapılırsa

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta - I_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

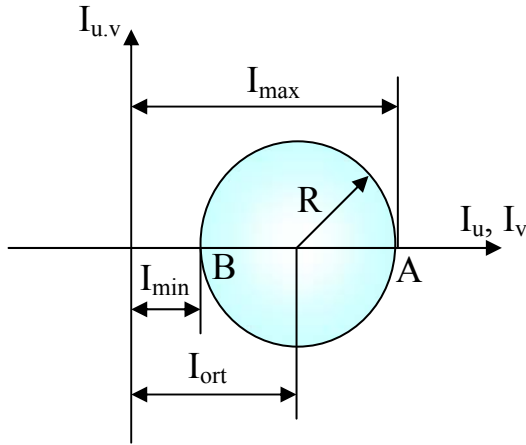
$$I_{uv} = 0 \text{ ise}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Eğer I_u, I_v, I_{uv} den θ' lı terimler yok edilirse

$$\left[I_u - \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) \right]^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \quad (\text{Çember Denklemi})$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



$$I_{\max} = I_{\text{ort}} + R$$

$$I_{\min} = I_{\text{ort}} - R$$

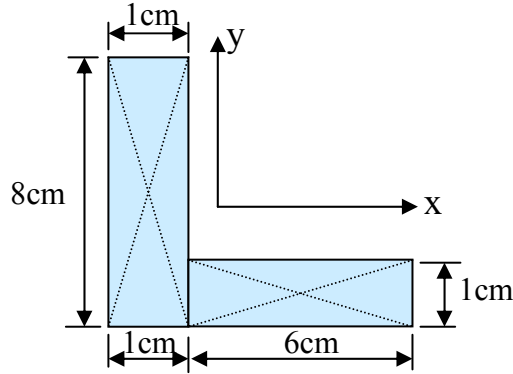
Atalet momentinin maksimum ve minimum değerine asal atalet momentleri, Bunların bulunduğu eksenlere asal eksenler denir.

Asal eksenler üzerinde $I_{xy} = 0$ ' dır.

$$I_{\text{ort}} = \frac{I_x + I_y}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

Örnek 6.11: Ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre $I_x, I_y, I_{xy}, I_{\max}, I_{\min}$ hesaplayınız.



Çözüm:

$$x_g = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0,5 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{8 + 6} = 2 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4 \cdot 8 + 0,5 \cdot 6}{8 + 6} = 2,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{1 \cdot 8^3}{12} + (4 - 2,5)^2 \cdot 8 + \frac{6 \cdot 1^3}{12} + (0,5 - 2,5)^2 \cdot 6 = 85,16 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 1^3}{12} + (0,5 - 2)^2 \cdot 8 + \frac{1 \cdot 6^3}{12} + (4 - 2,5)^2 \cdot 6 = 50,16 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = x_1 \cdot y_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot y_2 \cdot A_2 = (0,5 - 2) \cdot (4 - 2,5) \cdot 8 + (4 - 2,5) \cdot (0,5 - 2,5) \cdot 6 = -36 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot (-36)}{85,16 - 50,16}$$

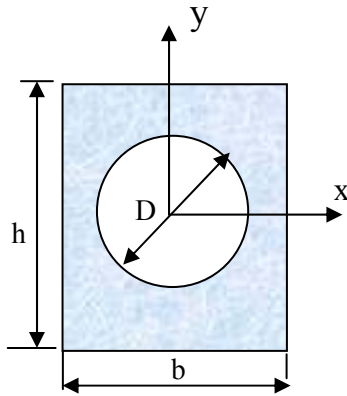
$$\theta = 32^\circ$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{85,16 + 50,16}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{85,16 - 50,16}{2}\right)^2 + (-36)^2}$$

$$I_{\max} = 67,66 + 40,02 = 107,68 \text{ cm}^4$$

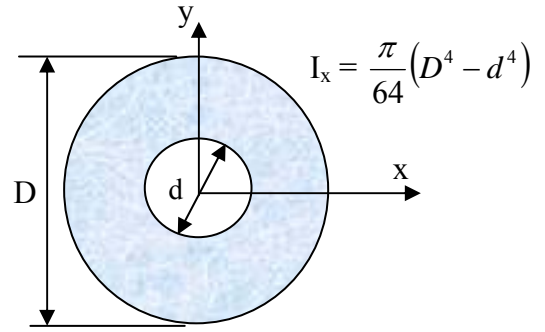
$$I_{\min} = 67,66 - 40,02 = 27,64 \text{ cm}^4$$

NOT: Bir kesitte delik varsa dolu kesitin atalet momentinden deliğin atalet momentini çıkarılır.



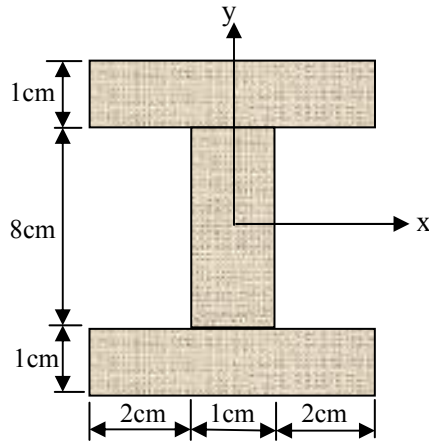
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{\pi D^4}{64}$$



$$I_x = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

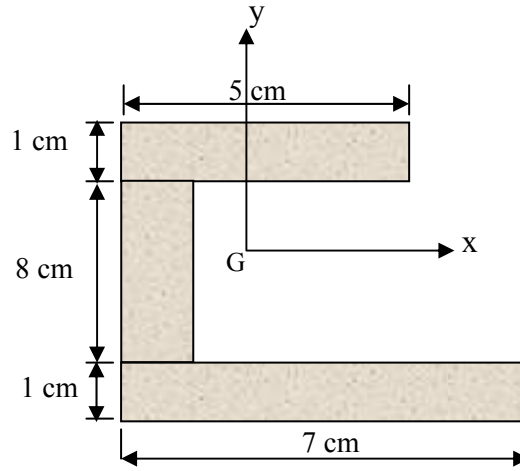
Örnek 6.12: Şekildeki cismin I_x, I_y, I_{xy} hesaplayınız.



$$I_x = \frac{1 \cdot 8^3}{12} + \left(\frac{5 \cdot 1^3}{12} + (4,5)^2 \cdot 5 \right) \cdot 2 = 246 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 1^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{5^3 \cdot 1}{12} \right) \text{ veya } \frac{10 \cdot 5^3}{12} - 2 \left(\frac{8 \cdot 2^3}{12} + (1,5)^2 \cdot 16 \right) = 21,5 \text{ cm}^4$$

Örnek 6.13: Verilen profil kesitte ağırlık merkezinden geçen x, y eksen takımına göre atalet momentlerini hesaplayınız.



$$x = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 7}{20} = 2,0 \text{ cm}$$

$$y = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{9,5 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 7}{20} = 4,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{5 \cdot 1^3}{12} + (9,5 - 4,5)^2 \cdot 5 + \frac{1 \cdot 8^3}{12} + (5 - 4,5)^2 \cdot 8 + \frac{1^3 \cdot 7}{12} + (0,5 - 4,5)^2 \cdot 7 = 282,6 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 5^3}{12} + (2,5 - 2)^2 \cdot 5 + \frac{8 \cdot 1^3}{12} + (0,5 - 2)^2 \cdot 8 + \frac{1 \cdot 7^3}{12} + (3,5 - 2)^2 \cdot 7 = 74,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = x_1 y_1 A_1 + x_2 y_2 A_2 + x_3 y_3 A_3 = 0,5 \cdot 5 \cdot 5 + (-1,5)(0,5) \cdot 8 + (1,5)(-4) \cdot 7 = -35,5 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot (-35,5)}{282,6 - 74,6}$$

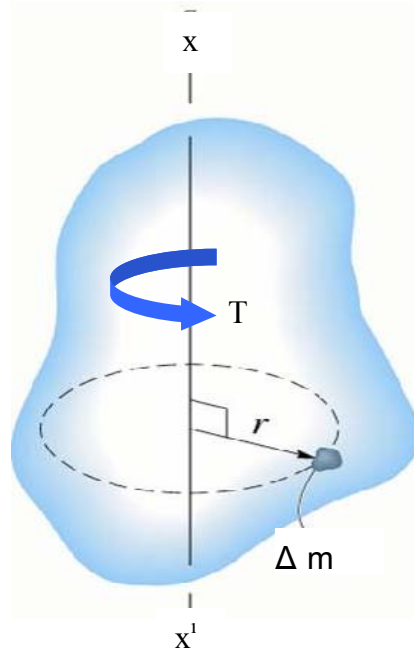
$$\theta = 9,42^\circ$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{282,6 + 74,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{282,6 - 74,6}{2}\right)^2 + (-35,5)^2}$$

$$I_{\max} = 178,6 + 109,89 = 288,49 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 178,6 - 109,89 = 68,71 \text{ cm}^4$$

6.5 KÜTLE ATALET MOMENTLERİ



Şekil 6.3

xx' eksen takımından r kadar uzaklıkta bir Δm kütlesi düşünelim buna bir kuvvet çifti uygulayalım (T). Sistem hareketsizken Δm kütlesi xx' eksenini etrafında dönmeye başlayacaktır. Burada sistemin verilen bir dönme hızına erişmesi için gerekli zamanın Δm kütlesiyle orantılı olduğunu göstermek istiyoruz. Bundan dolayı $r^2 \cdot \Delta m$ çarpımını sistemin ataletinin (eylemsizliğinin) yani sistemi harekete geçirmeye çalıştığımızda bunun direncinin bir ölçüsüdür. $r^2 \cdot \Delta m$ çarpımına Δm kütesinin xx' eksenine göre **kütle atalet momenti** denir.

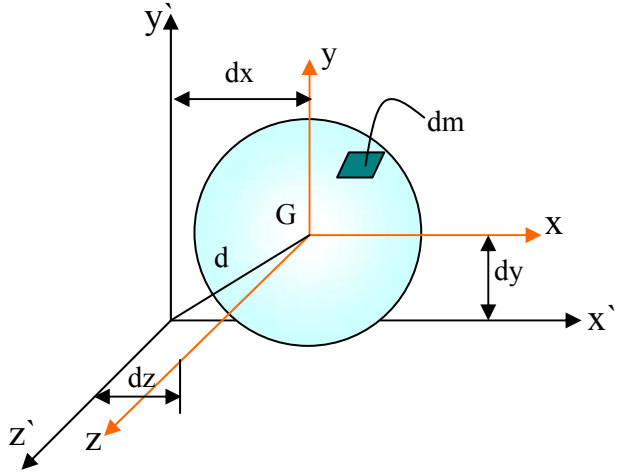
$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \dots + \Delta m_n)$$

$$I = \sum r_i^2 \Delta m_i = r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots + r_n^2 \Delta m_n$$

$$I = \int r^2 dm = k^2 m \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (\text{atalet yarıçapı})$$

Burada k atalet yarıçapı, I sabit kalmak üzere cismin tüm kütesinin konulması gereken uzaklığı ifade eder.

6.5.1 PARALEL EKSENLER TEOREMİ



$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

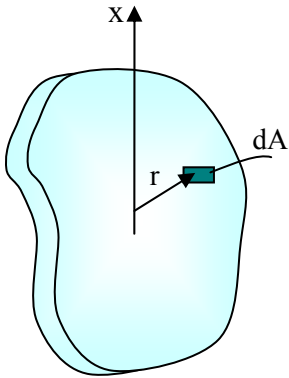
$$I = I_G + m \cdot d^2$$

$$(I_x)_k = (I_G)_k + m \cdot dy^2$$

Örnek 6.14: İnce Levhaların Kütle Atalet Momentleri

ρ : birim hacmin kütlesi (kg / m³)

t : sabit



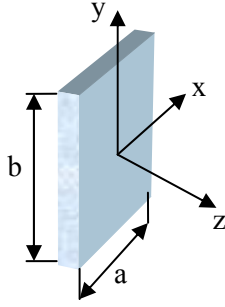
$$(I_{xx})_{\text{kütle}} = \int r^2 dm \quad dm = t \rho dA$$

$$(I_{xx})_k = \int r^2 t \rho dA = t \rho \int r^2 dA \quad \text{burada } \int r^2 dA \text{ Polar At. M}$$

$$(I_{xx})_{\text{kütle}} = t \rho (I_{xx})_{\text{alan}} \quad \text{birimi ise (kg.m}^2 \text{) dir}$$

$$(I_{yy})_{\text{kütle}} = t \rho (I_{yy})_{\text{alan}}$$

$$(I_o)_{\text{kütle}} = t \rho (I_o)_{\text{alan}}$$



$$(I_{xx})_{\text{k\u00fctle}} = t\rho(I_{xx})_{\text{alan}} = t\rho\left(\frac{ab^3}{12}\right)$$

$$(I_{yy})_{\text{k\u00fctle}} = t\rho(I_{yy})_{\text{alan}} = t\rho\left(\frac{ba^3}{12}\right)$$

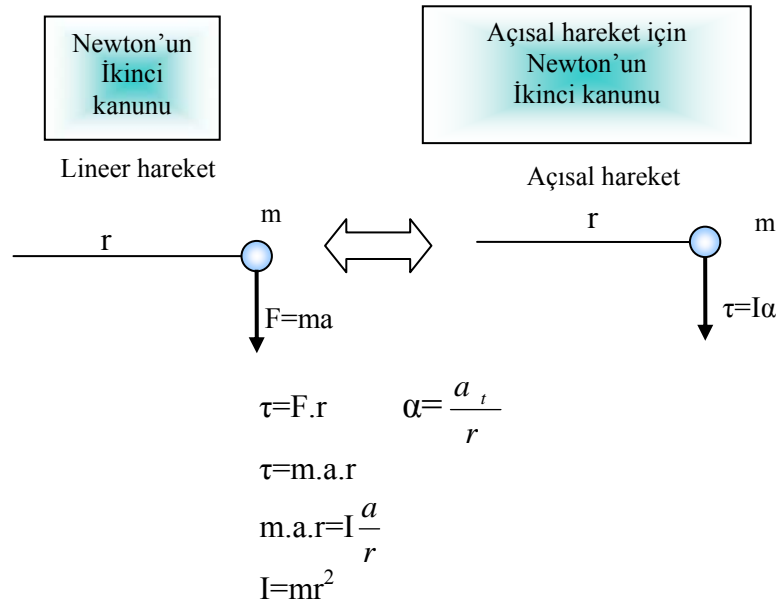
$V=a.b.t$ ve $m=\rho V$ yukarıdaki ifadelerde yerine konulursa

$$(I_x)_{\text{k\u00fctle}} = mb^2/12 \text{ ve } (I_y)_{\text{k\u00fctle}} = ma^2/12$$

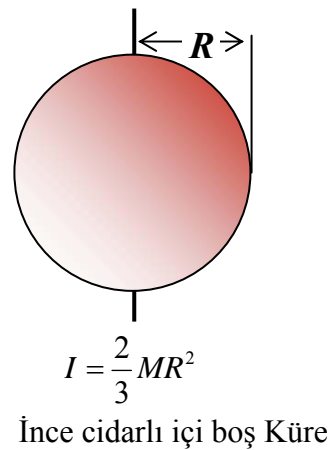
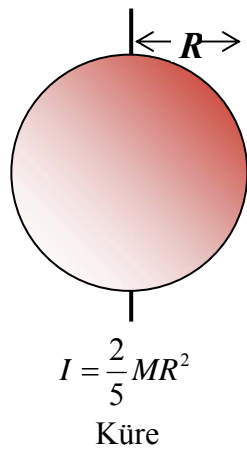
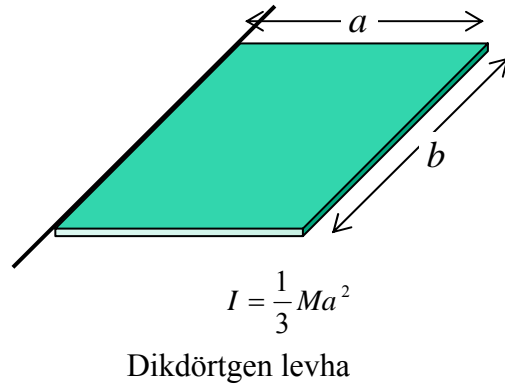
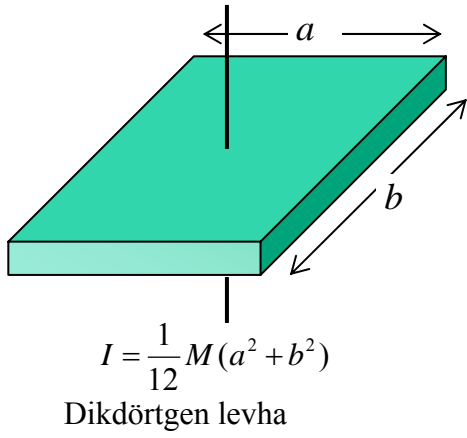
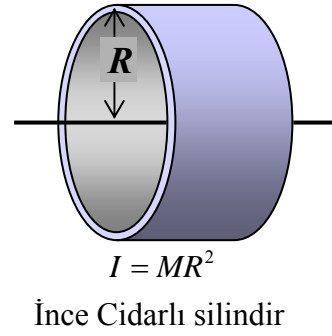
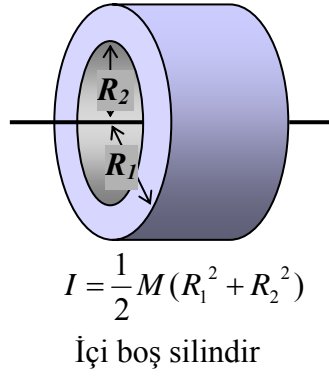
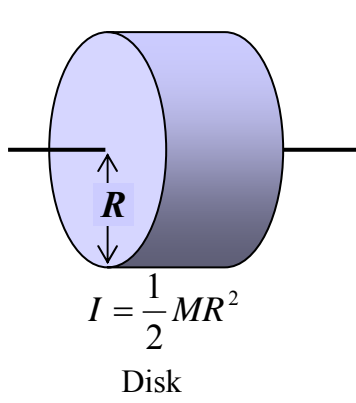
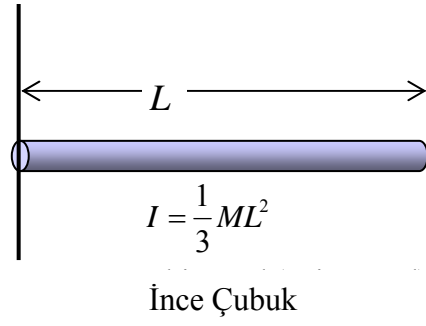
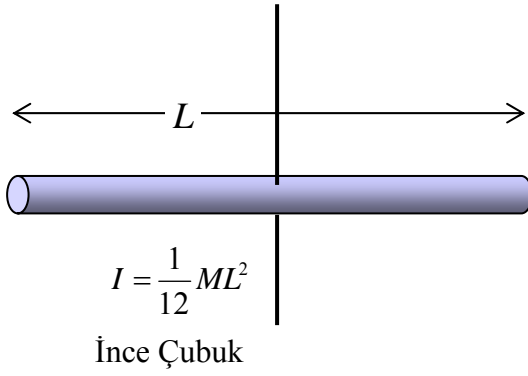
$$(I_o)_{\text{k\u00fctle}} = (m/12).(a^2+b^2) \text{ elde edilir.}$$

6.5.2 L\u00cdNEER VE A\u00c7ISAL HAREKET

Sabit bir noktadan r kadar uzaklıktaki m k\u00fctlesi sabit bir eksen etrafında d\u00f6nd\u00fcr\u00fclmek istensin. Bu lineer hareket Newton'un ikinci kanunundaki kuvvet ve ivme tanımlanabilir. Sadece d\u00f6nme olarak ele alınsa da bu d\u00f6nen sistemde ikinci kanun uygulanabilir. Ve buradan k\u00fctle atalet momenti tanımlanabilir.



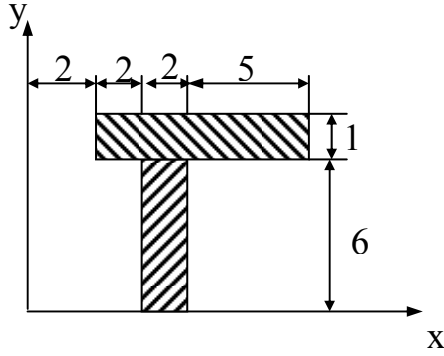
6.5.3 BAZI CİSİMLERİN KÜTLE ATALET MOMENTLERİ



6.6 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

ALAN ATALET MOMENTİ İLE İLGİLİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



- a) Ağırlık merkezini bulunuz.
b) Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentlerini hesaplayınız.
Not: Ölçüler cm'dir.

$$x = \frac{9 \times 6,5 + 12 \times 5}{9 + 12} = \frac{118,5}{21} = 5,64 \text{ cm}$$

$$y = \frac{9 \times 6,5 + 12 \times 3}{21} = 4,5 \text{ cm}$$

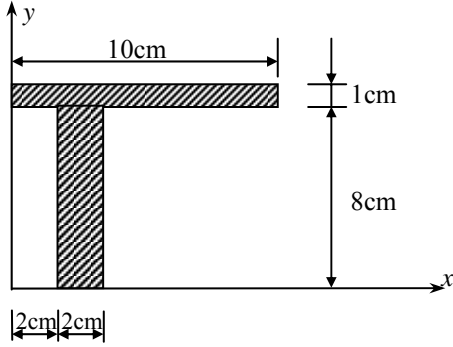
$$I_x = \frac{9 \times 1^3}{12} + (9)(6,5 - 4,5)^2 + \frac{6^3 \times 2}{12} + (12)(3 - 4,5)^2$$

$$I_x = 0,75 + 36 + 36 + 27 = 99,75 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1 \times 9^3}{12} + (9)(6,5 - 5,64)^2 + \frac{2^3 \times 6}{12} + (12)(5 - 5,64)^2$$

$$I_y = 60,75 + 6,65 + 4 + 4,91 = 76,31 \text{ cm}^4$$

Problem 2)



Verilen kesitin;

- Ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.
- Ağırlık merkezinden geçen koordinat eksenine göre atalet momentlerini hesaplayınız.
- Asal atalet momentlerini hesaplayınız.

I	x	y	A	Ax	Ay
1	5	8,5	10	50	85
2	3	4	16	48	64
Toplam			26	98	149

a)

$$\bar{x} = \frac{\sum xA}{\sum A} = \frac{98}{26} = 3,77 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} = \frac{149}{26} = 5,73 \text{ cm}$$

b)

$$I_x = \frac{10 \cdot 1^3}{12} + (8,5 - 5,73)^2 \cdot 10 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + (4 - 5,73)^2 \cdot 16 = 210,78 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 10^3}{12} + (5 - 3,77)^2 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 2^3}{12} + (3 - 3,77)^2 \cdot 16 = 113,28 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 10 \cdot (8,5 - 5,73)(5 - 3,77) + 16 \cdot (4 - 5,73)(3 - 3,77) = 55,38 \text{ cm}^4$$

c)

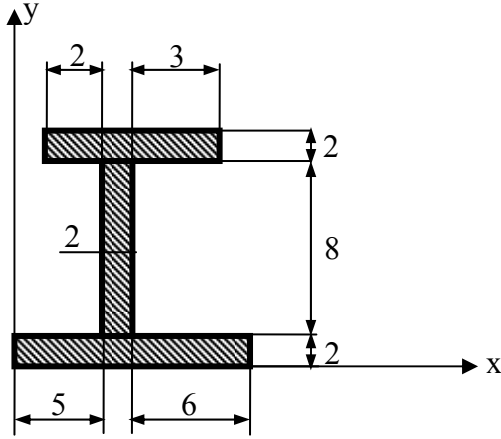
$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{210,78 + 113,28}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{210,78 - 113,28}{2}\right)^2 + (55,38)^2}$$

$$I_{\max/\min} = 162,03 \pm 73,78$$

$$I_{\max} = 235,81 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 88,25 \text{ cm}^4$$

Problem 3)



Verilen profil kesitte;

- Ağırlık merkezini,
- Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentini,
- Asal atalet momentini hesaplayınız. (verilen ölçüler cm'dir)

	<i>A</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>Ax</i>	<i>Ay</i>
1	14	6,5	11	91	154
2	16	6	6	96	96
3	26	6,5	1	169	26
	56			356	276

$$\bar{x} = \frac{356}{56} = 6,35 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{276}{56} = 4,92 \text{ cm}$$

b)

$$I_x = \frac{7 \cdot 2^3}{12} + (11 - 4,92)^2 \cdot 14 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + (6 - 4,92)^2 \cdot 16 + \frac{13 \cdot 2^3}{12} + (1 - 4,92)^2 \cdot 26 = 1034,1 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 7^3}{12} + (6,5 - 6,35)^2 \cdot 14 + \frac{8 \cdot 2^3}{12} + (6 - 6,35)^2 \cdot 16 + \frac{2 \cdot 13^3}{12} + (6,5 - 6,35)^2 \cdot 26 = 431,1 \text{ cm}^4$$

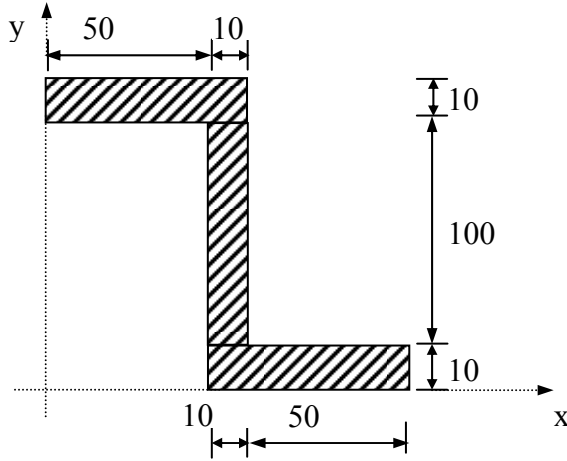
$$I_{xy} = 14(0,15)(6,08) + 16(-0,35)(1,08) + 26(0,15)(-3,92) = -8,628 \text{ cm}^4$$

c)

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{1034,1 + 431,1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1034,1 - 431,1}{2}\right)^2 + (-8,628)^2}$$

$$I_{\max/\min} = 732,6 \pm 495,57 \Rightarrow \underline{I_{\max} = 1228,17 \text{ cm}^4} \quad ; \quad \underline{I_{\min} = 237,03 \text{ cm}^4}$$

Problem 4)



Şekilde verilen profil kesitin ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre atalet momentlerini ve asal atalet momentlerini hesaplayınız. (Ölçüler mm'dir)

$$\bar{x} = \frac{\sum xA}{\sum A} = \frac{30 \cdot 600 + 55 \cdot 1000 + 80 \cdot 600}{600 + 1000 + 600} = 55 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} = \frac{115 \cdot 600 + 600 \cdot 1000 + 5 \cdot 600}{600 + 1000 + 600} = 60 \text{ mm}$$

a) Şekilde verilen parça 3 kısma ayrılarak çözülür. Burada;

$$I_{xT} \text{ hesaplanması; } I_{xT} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{x1} = I_{x3} = \frac{b \cdot h^3}{12} + d^2 \cdot A = \frac{60 \cdot 10^3}{12} + (115 - 60)^2 \cdot 600 = 1820000 \text{ mm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{b \cdot h^3}{12} + d^2 \cdot A = \frac{10 \cdot 100^3}{12} + 0^2 \cdot 1000 = 833333,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{xT} = 4473333,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{yT} \text{ hesaplanması; } I_{yT} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

$$I_{y1} = I_{y3} = \frac{b \cdot h^3}{12} + d^2 \cdot A = \frac{10 \cdot 60^3}{12} + 25^2 \cdot 600 = 555000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{b \cdot h^3}{12} + d^2 \cdot A = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + 0^2 \cdot 1000 = 8333,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{yT} = 1118333,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} \text{ hesaplanması; } I_{xy} = x_1 y_1 A_1 + x_2 y_2 A_2 + x_3 y_3 A_3$$

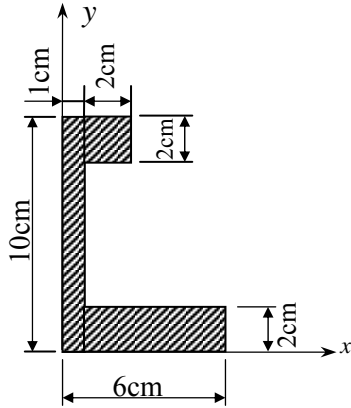
$$I_{xy} = (115 - 60) \cdot (30 - 55) \cdot 600 + (60 - 60) \cdot (55 - 55) \cdot 1000 + (5 - 60) \cdot (80 - 55) \cdot 600$$

$$I_{xy} = -1650000 \text{ mm}^4$$

$$\text{b) } I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \text{ buradan;}$$

$$I_{\min} = 442855,164 \text{ mm}^4 \text{ ,, } I_{\max} = 5148811,496 \text{ mm}^4 \text{ olmaktadır.}$$

Problem 5)



Ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre;

- Atalet momentlerini
- Asal atalet momentlerini hesaplayınız.

	x	y	A	xA	yA
1	2	9	4	8	36
2	0,5	5	10	5	50
3	3,5	1	10	35	10
	<i>Toplam</i>		<u>24</u>	<u>48</u>	<u>96</u>
			ΣA	ΣxA	ΣyA

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{48}{24} = 2 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{96}{24} = 4 \text{ cm}$$

a)

$$I_x = \frac{2 \times 2^3}{12} + 4(9-4)^2 + \frac{1 \times 10^3}{12} + 10(5-4)^2 + \frac{5 \times 2^3}{12} + 10(1-4)^2 \Rightarrow \underline{I_x = 288 \text{ cm}^4}$$

$$I_y = \frac{2 \times 2^3}{12} + 4(2-2)^2 + \frac{10 \times 1^3}{12} + 10(0,5-2)^2 + \frac{2 \times 5^3}{12} + 10(3,5-2)^2 \Rightarrow \underline{I_y = 68 \text{ cm}^4}$$

$$I_{xy} = x_1 A_1 y_1 + x_2 A_2 y_2 + x_3 A_3 y_3$$

$$I_{xy} = (2-2) \cdot (9-4) \cdot 4 + (0,5-2) \cdot (5-4) \cdot 10 - (3,5-2) \cdot (1-4) \cdot 10 \Rightarrow \underline{I_{xy} = -60 \text{ cm}^4}$$

b)

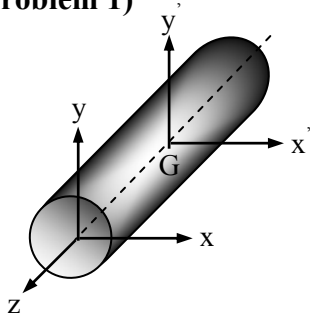
$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = 178 \pm 125,3$$

$$\underline{I_{\max} = 303,3 \text{ cm}^4}$$

$$\underline{I_{\min} = 52,7 \text{ cm}^4}$$

KÜTLE ATALET MOMENTİ İLE İLGİLİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



- L=50 mm ve m=493,223 gr olan ince bir çubuğun;
- y' ekseninde dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini
 - y ekseninde dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$$I_{y'} = \frac{1}{12} m.L^2$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12} 493.223.(5)^2$$

$$I_{y'} = 1027,548 \text{ gr.cm}^2$$

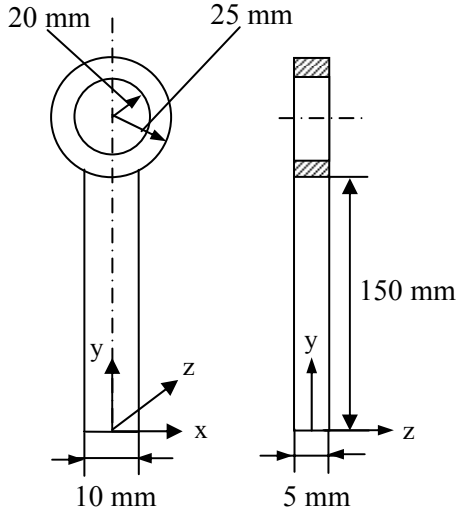
b)

$$I_y = \frac{1}{3} m.L^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} 493.223.(5)^2$$

$$I_y = 4110,19 \text{ gr.cm}^2$$

Problem 2)



Şekilde gösterilen cismin x ve z eksenleri etrafında döndürülmesi durumunda kütle atalet momentlerini bulunuz. ($\rho=7,85 \text{ gr/cm}^3$)

Çözüm:

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2$$

$$V_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 15 = 7,5 \text{ cm}^3$$

$$m_1 = \rho \cdot V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85 \cdot 7,5 \Rightarrow m_1 = 58,875 \text{ gr}$$

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2 = \frac{1}{3} \cdot 58,875 \cdot (15)^2 \Rightarrow I_{x1} = 4415,625 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \text{ (Tam dairenin atalet momenti)}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \text{ (Yarı dairenin atalet momenti)}$$

$$I_{x2} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \cdot \rho \cdot t + m_2 \cdot d^2$$

$$V_2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot t = \pi \cdot (2,5^2 - 2^2) \cdot 0,5 = 3,53 \text{ cm}^3 \quad (m_2 = \rho \cdot t \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2))$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85 \cdot 3,53 \Rightarrow m_2 = 27,71 \text{ gr}$$

$$I_{x2} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \cdot \rho \cdot t + m_2 \cdot d^2$$

$$I_{x2} = \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2) \cdot (R^2 - r^2) \cdot \rho \cdot t + m_2 \cdot d^2$$

$$I_{x2} = \frac{m_2}{4} (R^2 + r^2) + m_2 \cdot d^2 = \frac{27,71}{4} \cdot (2,5^2 + 2^2) + 27,71 \cdot (17,5)^2$$

$$I_{x2} = 8557,19 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{xT} = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_{xT} = 4415,625 + 8557,19$$

$$I_{xT} = 12928,815 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 a^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3} \cdot 58,875 \cdot (15)^2$$

$$I_{z1} = 4415,625 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (R^2 + r^2) + m_2 \cdot d^2$$

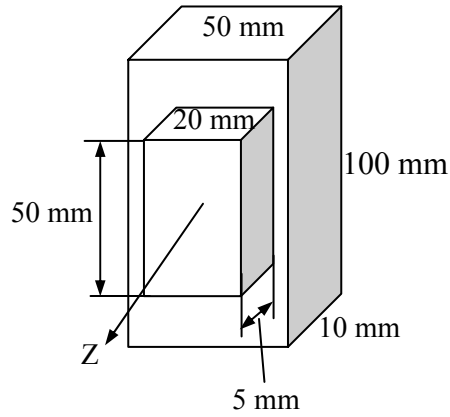
$$I_{z2} = \frac{1}{2} \cdot 27,71 \cdot (2,5^2 + 2^2) + 27,71 \cdot (17,5)^2 = 8628,2 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{zT} = I_{z1} + I_{z2}$$

$$I_{zT} = 4415,625 + 8628,2$$

$$I_{zT} = 13043,82 \text{ gr.cm}^2$$

Problem 3)



Şekilde verilen cismin z eksenine göre kütle atalet momentini bulunuz.

$$(\rho=7,85 \text{ gr/cm}^3)$$

Çözüm:

$$V_1 = 20 \cdot 50 \cdot 5 = 5000 \text{ mm}^3$$

$$m_1 = \rho \cdot V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85 \cdot 5000$$

$$m_1 = 39,25 \text{ gr}$$

$$I_{z1} = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2)$$

$$I_{z1} = \frac{1}{12} \cdot 39,25 \cdot (5^2 + 2^2)$$

$$I_{z1} = 94,85 \text{ gr.cm}^2$$

$$V_2 = 10 \cdot 100 \cdot 5 = 50000 \text{ mm}^3$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85 \cdot 50000$$

$$m_2 = 392,5 \text{ gr}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{12} m_2 (a^2 + b^2)$$

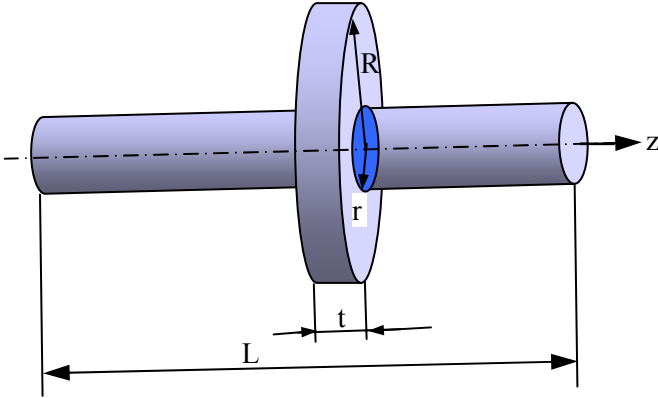
$$I_{z2} = \frac{1}{12} \cdot 392,5 \cdot (5^2 + 10^2)$$

$$I_{z2} = 4088,54 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{zT} = 94,85 + 4088,54$$

$$I_{zT} = 4183,39 \text{ gr.cm}^2$$

Problem 4)



$R=100$ mm, $r=25$ mm, $L=300$ mm, $t=5$ mm ve $\rho=7.85$ gr/cm³ olan şekildeki parça için z ekseninde dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini hesaplayınız.

Çözüm:

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot L$$

$$V_1 = \pi \cdot (2,5)^2 \cdot 30$$

$$V_1 = 589,04 \text{ cm}^3$$

$$m_1 = \rho \cdot V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85 \cdot 589,04$$

$$m_1 = 4624,03 \text{ gr}$$

$$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot r^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{2} \cdot 4624,03 \cdot (2,5)^2$$

$$I_{z1} = 14450 \text{ gr.cm}^2$$

$$V_2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot L$$

$$V_2 = \pi \cdot (10^2 - 2,5^2) \cdot 0,5$$

$$V_2 = 147,26 \text{ cm}^3$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85 \cdot 147,26$$

$$m_2 = 1156 \text{ gr}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2} m_2 \cdot (R^2 + r^2)$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2} \cdot 1156 \cdot (10^2 + 2,5^2)$$

$$I_{z2} = 61412,5 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{zT} = 14450 + 61412,5$$

$$I_{zT} = 75862,5 \text{ gr.cm}^2$$