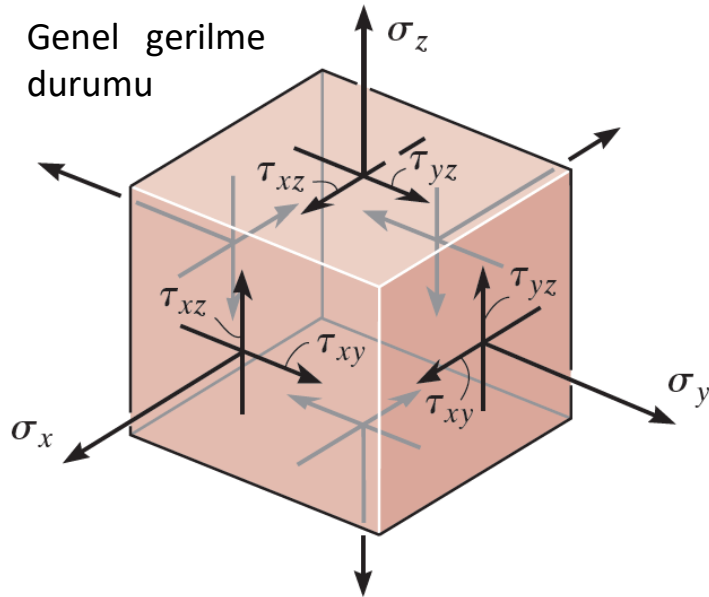


## 3- Gerilme Dönüşümleri

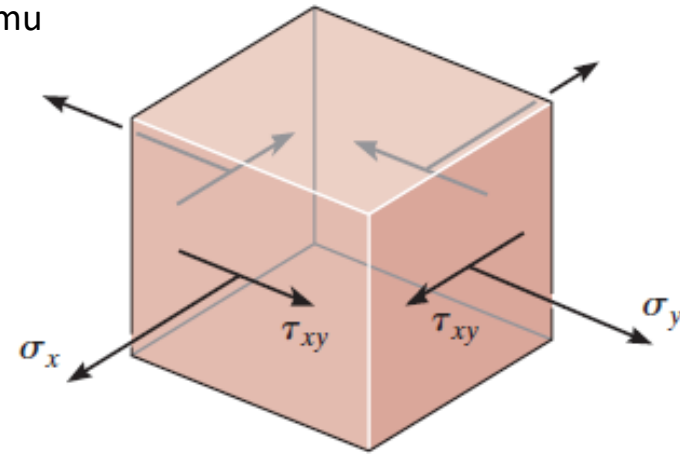
### 3.1. Düzlem Gerilme Dönüşümü

Bir cismin bünyesindeki herhangi bir noktadaki gerilme durumu, üç boyutlu birim eleman üzerinde gösterilen toplam altı normal gerilme ve kayma gerilmesi bileşeni ile temsil edilmektedir.

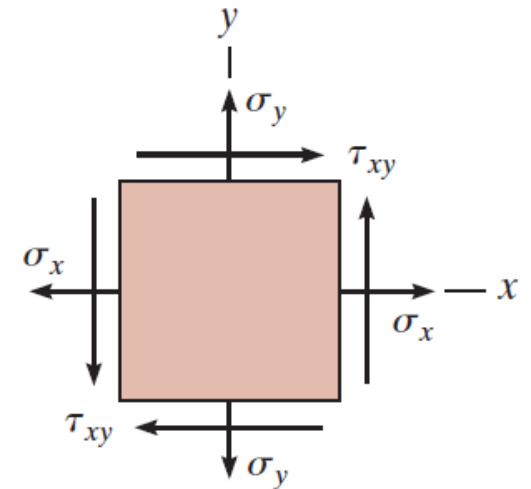
Pratik mühendislik uygulamalarının çoğunda yükler belirli bir düzlemde yer aldığından, sebep oldukları gerilmeler de bu düzlemde ele alınır. Bu durumda, malzemenin düzlem gerilme etkisi altında olduğu söylenir.



Düzlem gerilme durumu



Bir noktadaki düzlem gerilme durumu genel olarak, birim hacimli elemanın sadece dört yüzüne etki eden iki normal gerilme bileşeni ve bir kayma gerilmesi bileşeni ile temsil edilir. Örneğin x-y düzlemi dikkate alınırsa, düzlem gerilme durumu için gerilme bileşenleri  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , ve  $\tau_{xy}$  olur. Yandaki şekilde x-y düzlemi için düzlem gerilme durumunun farklı bir gösterimi verilmiştir.

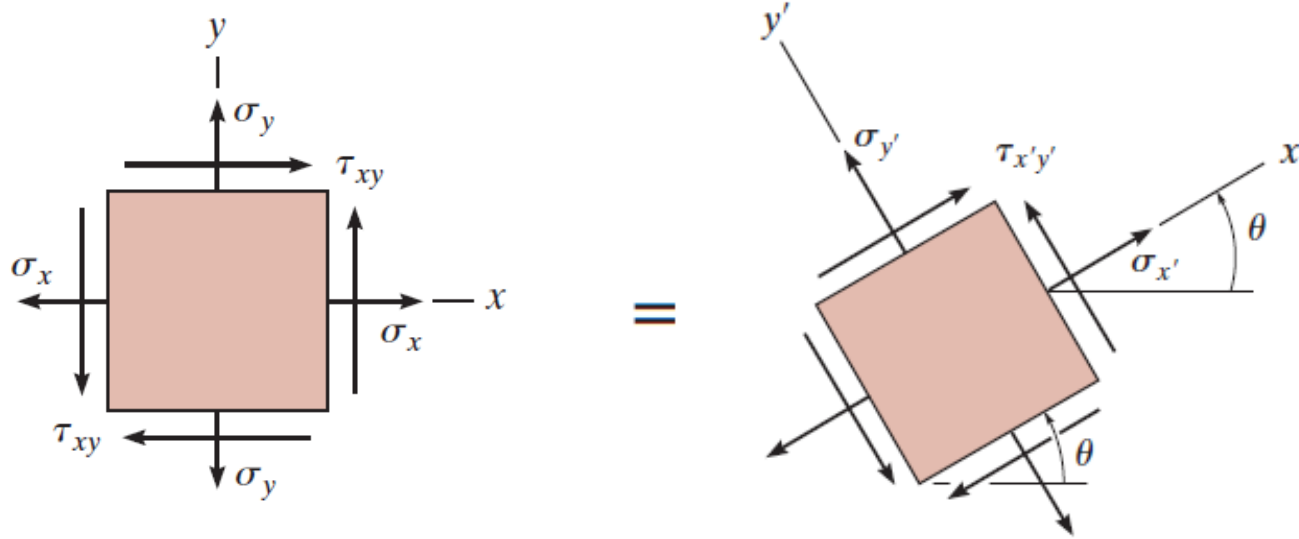


## 3- Gerilme Dönüşümleri

### 3.1. Düzlem Gerilme Dönüşümü

Bir noktadaki düzlem gerilme durumu için,  $\theta$  açısı ile yönlendirilmiş farklı bir düzlem eleman ele alınır, aşağıdaki şekilde görülen üç farklı gerilme bileşeni söz konusu olur. Bu gerilme bileşenleri ise yeni  $x'-y'$  eksenleri dikkate alınarak belirlenir.

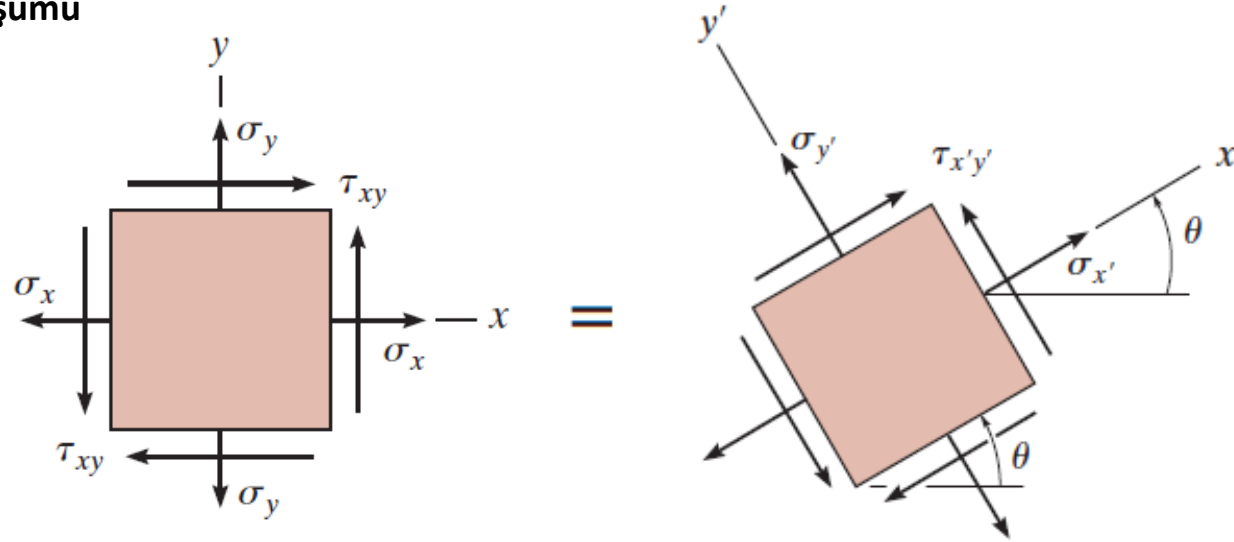
Bir noktadaki düzlem gerilme durumu her durumda iki normal gerilme ve bir kayma gerilmesi bileşeni ile temsil edilmektedir. Ancak bu üç bileşen, düzlem elemanın birbirinden farklı her bir  $\theta$  yönlendirmesi için farklı değerler alacaktır. Farklı  $\theta$  açıları ile yönlendirilmiş düzlem elemanlar için hesaplanan farklı gerilme değerleri birbirinin eşdeğeri olan gerilme durumlarını ifade eder.



Herhangi bir açı ile yönlendirilmiş düzlem eleman üzerindeki gerilme bileşenlerinin değeri bilindiğinde, farklı bir açı ile yönlendirilmiş eşdeğer gerilme durumunu temsil eden gerilme bileşenleri elde edilebilir. Bu durum,  $x$ - $y$  eksen takımı için  $x$  ve  $y$  doğrultularında etkiyen  $F_x$  ve  $F_y$  kuvvetleri biliniyorsa,  $x$ - $y$  eksen takımı ile belirli bir  $\theta$  açısı yapan  $x'$ - $y'$  eksen takımı için  $x'$  ve  $y'$  doğrultularındaki kuvvetlerin hesaplanması ile aynıdır. Kuvvetlerin bu şekilde dönüşümü, kuvvetlerin sadece yön ve şiddetlerin bilinmesini gerektirir. Ancak gerilme dönüşümü için gerilmelerin yönü ve şiddetlerinin yanısıra etkidikleri yüzeyin doğrultusunun belirlenmesi de gerekir.

### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.1. Düzlem Gerilme Dönüşümü



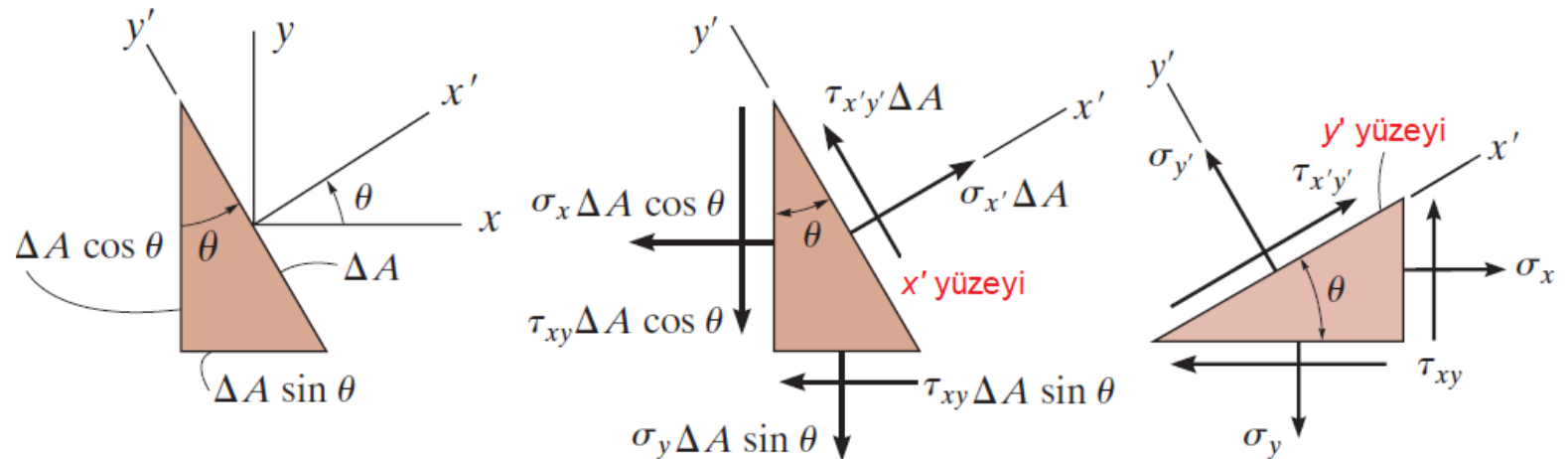
Herhangi bir  $x$ - $y$  eksen takımına sahip düzlem eleman için düzlem gerilme durumu biliniyor ise farklı yönlendirmeye sahip bir düzlem eleman için gerilme dönüşümü şu adımları içerir:

a)  $x$ - $y$  eksen takımına sahip düzlem elemanın iki yüzeyi ile eşdeğer gerilmenin arandığı yüzey (örneğin  $x'$  yüzeyi veya  $y'$  yüzeyi) arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bir üçgen parça ile temsil edilebilir. Üçgenin yüzeylerinin alanları  $\Delta A$ ,  $\Delta A \cos \theta$  ve  $\Delta A \sin \theta$  olacaktır.

b) Üçgen parçanın serbest cisim diyagramı çizilir.

c) Üçgen parçanın yüzeyindeki kuvvetler için ilgili eksenlere göre denge denklemleri yazılır.

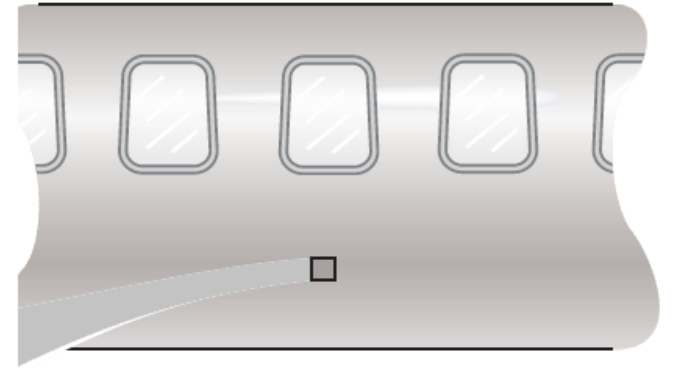
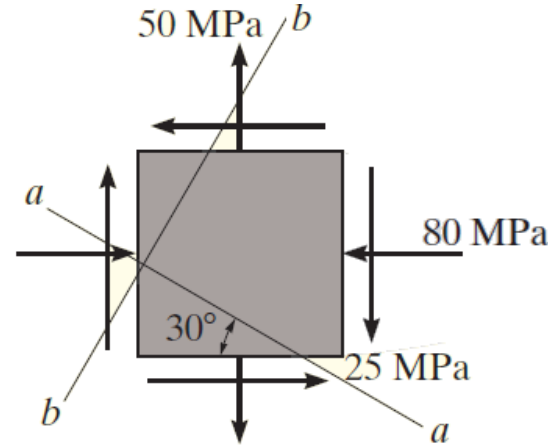
d) İlgili yüzeydeki gerilmeler hesaplanmış olur.



### 3- Gerilme Dönüşümleri

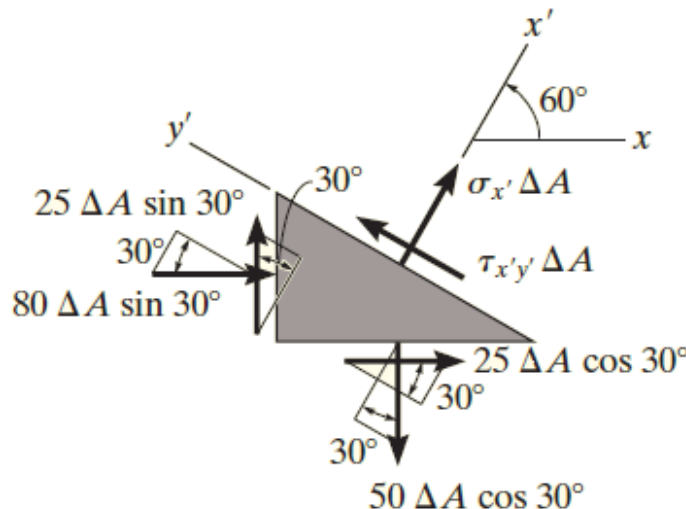
#### 3.1. Düzlem Gerilme Dönüşümü

**Örnek:** Bir uçağın gövdesindeki bir noktada düzlem gerilme durumu yandaki yönlendirilmiş düzlem eleman üzerinde gösterilmiştir. Düzlem elemanın saat yönünde  $30^\circ$  döndürülmesi durumunda eşdeğer gerilmeleri bulunuz.



**Çözüm:** Düzlem elemandan aşağıdaki şekilde a-a yüzeyini de içerecek üçgen parçası çıkarılır ve bu parçanın serbest cisim diyagramı elde edilir. Parçanın dengede olması gereğinden a-a yüzeyindeki normal gerilme ve kayma gerilmesi elde edilir. Denge denklemleri, yüzey normali  $x'$  eksen ve yüzeye teğet  $y'$  eksen için yazılırsa gerilmeler doğrudan elde edilmiş olur. a-a yüzeyinin alanı  $\Delta A$  alınmıştır.

Normal gerilme negatif olarak elde edildiğinden, aşağıdaki gösterilen yönün tersi yöndedir.



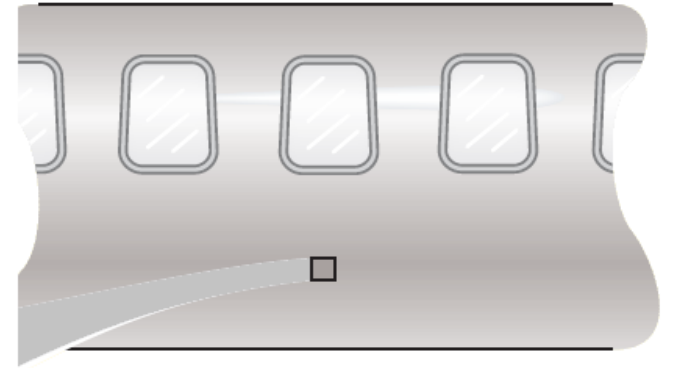
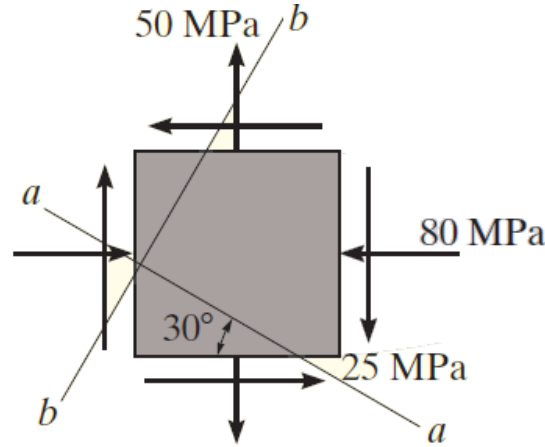
$$\begin{aligned}
 +\nearrow \sum F_{x'} &= 0; & \sigma_{x'} \Delta A - (50 \Delta A \cos 30^\circ) \cos 30^\circ \\
 & & + (25 \Delta A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ + (80 \Delta A \sin 30^\circ) \sin 30^\circ \\
 & & + (25 \Delta A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ = 0 \\
 \sigma_{x'} &= -4.15 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +\searrow \sum F_{y'} &= 0; & \tau_{x'y'} \Delta A - (50 \Delta A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ \\
 & & - (25 \Delta A \cos 30^\circ) \cos 30^\circ - (80 \Delta A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ \\
 & & + (25 \Delta A \sin 30^\circ) \sin 30^\circ = 0 \\
 \tau_{x'y'} &= 68.8 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

### 3- Gerilme Dönüşümleri

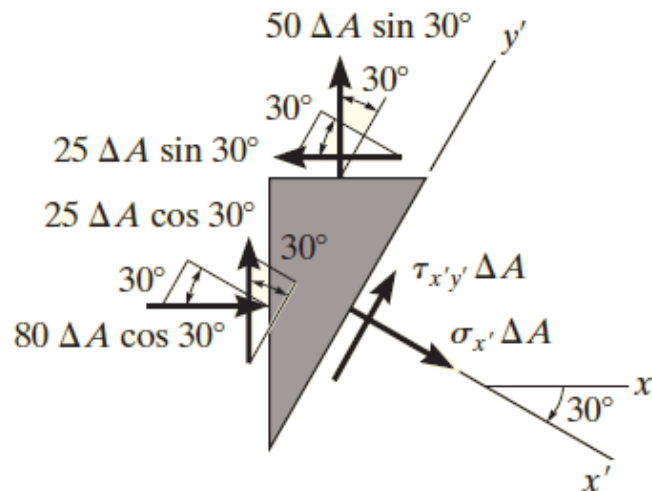
#### 3.1. Düzlem Gerilme Dönüşümü

**Örnek:** Bir uçağın gövdesindeki bir noktada düzlem gerilme durumu yandaki yönlendirilmiş düzlem eleman üzerinde gösterilmiştir. Düzlem elemanın saat yönünde  $30^\circ$  döndürülmesi durumunda eşdeğer gerilmeleri bulunuz.



**Çözüm:** Benzer işlemler b-b düzlemindeki gerilmeleri hesaplamak için de yapılmalıdır. Düzlem elemandan aşağıdaki şekilde b-b yüzeyini de içerecek üçgen parçası çıkarılır ve bu parçanın serbest cisim diyagramı elde edilir. Parçanın dengede olması gereğinden b-b yüzeyindeki normal gerilme ve kayma gerilmesi elde edilir. Denge denklemleri, yüzey normali  $x'$  eksen ve yüzeye teğet  $y'$  eksen için yazılırsa gerilmeler doğrudan elde edilmiş olur. b-b yüzeyinin alanı  $\Delta A$  alınmıştır.

Hem normal gerilme hem de kayma gerilmesi negatif olarak elde edildiğinden, aşağıdaki gösterilen yönün tersi yöndedirler.



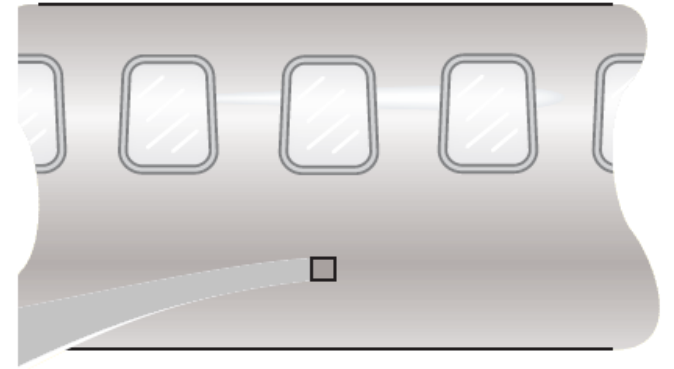
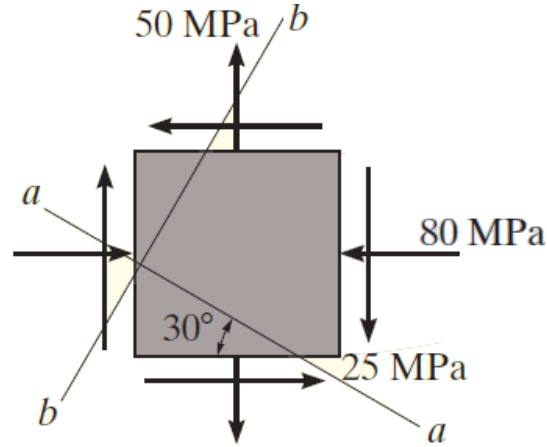
$$\begin{aligned} +\nearrow \Sigma F_{x'} &= 0; \quad \sigma_{x'} \Delta A - (25 \Delta A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ \\ &\quad + (80 \Delta A \cos 30^\circ) \cos 30^\circ - (25 \Delta A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ \\ &\quad - (50 \Delta A \sin 30^\circ) \sin 30^\circ = 0 \\ \sigma_{x'} &= -25.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\nearrow \Sigma F_{y'} &= 0; \quad \tau_{x'y'} \Delta A + (25 \Delta A \cos 30^\circ) \cos 30^\circ \\ &\quad + (80 \Delta A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ - (25 \Delta A \sin 30^\circ) \sin 30^\circ \\ &\quad + (50 \Delta A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ = 0 \\ \tau_{x'y'} &= -68.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

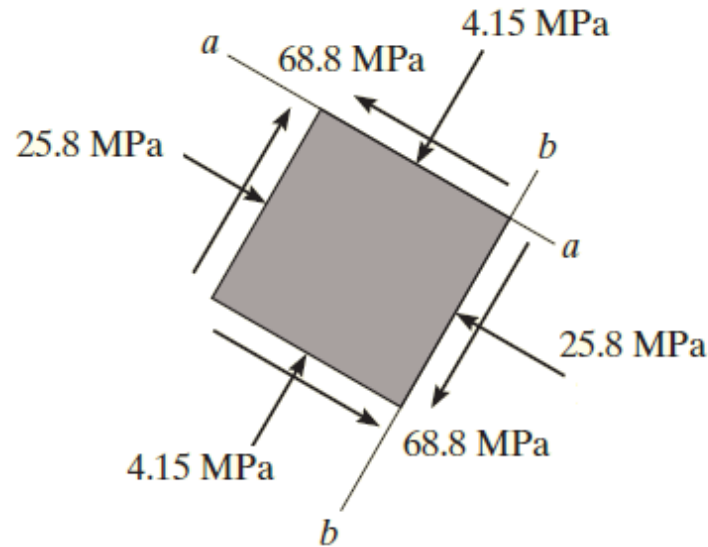
### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.1. Düzlem Gerilme Dönüşümü

**Örnek:** Bir uçağın gövdesindeki bir noktada düzlem gerilme durumu yandaki yönlendirilmiş düzlem eleman üzerinde gösterilmiştir. Düzlem elemanın saat yönünde  $30^\circ$  döndürülmesi durumunda eşdeğer gerilmeleri bulunuz.



**Çözüm:** a-a ve b-b yüzeyleri için elde edilen gerilmeler kullanılarak, saat yönünde  $30^\circ$  döndürülmüş düzlem gerilme elemanı üzerinde eşdeğer gerilme durumu aşağıdaki şekilde gösterilir. Hesap yapılan a-a ve b-b yüzeylerinin karşısındaki yüzeylerde gerilmelerin, a-a ve b-b yüzeylerinde elde edilen gerilmelere eşit olduğunu hatırlayınız.



### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.2. Düzlem Gerilme Dönüşümünün Genel Denklemleri

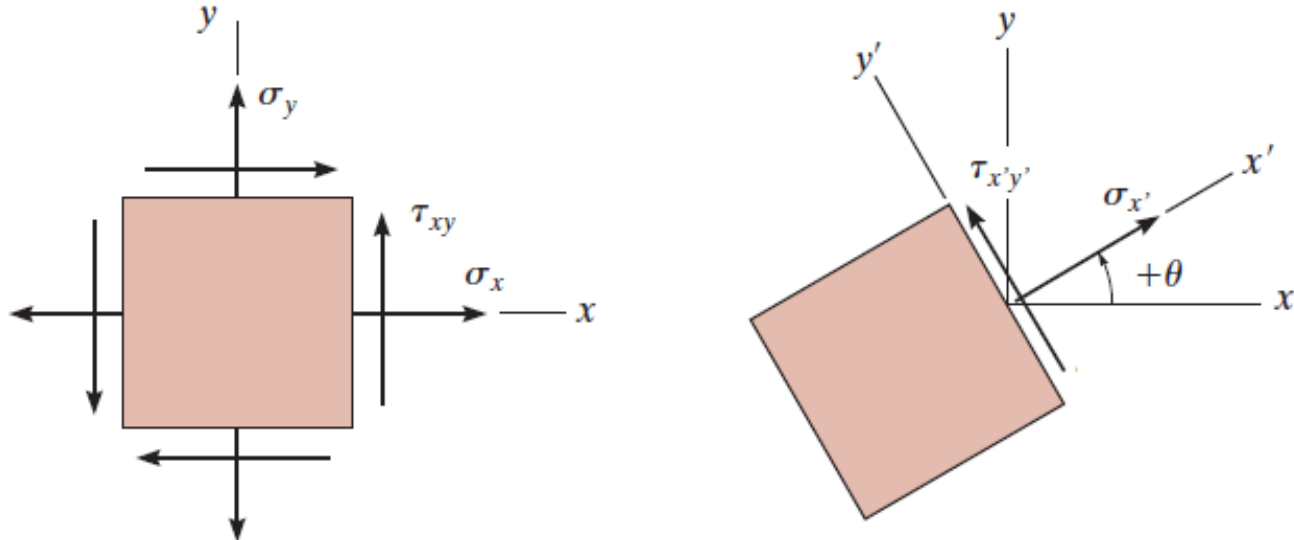
$x$ - $y$  eksen takımına sahip düzlem elemanın yüzeylerindeki gerilmeleri herhangi bir  $x'$ - $y'$  eksen takımına sahip düzlem elemandaki eşdeğer gerilmelere dönüştürmek için kullanılan yöntem genel bir gerilme dönüşümü denklem seti ile ifade edilebilir.

**İşaret kabulü:** Denklem setini kullanmak için gerilmelere ait işaret kabulünün bilinmesi gerekir. Herhangi bir yüzeydeki normal gerilme, yüzeyin normali ile aynı yönde ise pozitif işaretli olarak kabul edilir. İlgili yüzeye doğru olan normal gerilmenin işareti ise negatiftir. Eğer herhangi bir yüzeyin normali, saat yönünün tersi yönde  $90^\circ$  döndürülürse, o yüzeydeki kayma gerilmesinin pozitif yönü belirlenmiş olur.

Aşağıda verilen  $x$ - $y$  eksen takımına sahip soldaki düzlem elemanın dört yüzeyinde de normal gerilme pozitifdir. Kayma gerilmesi ise düşey yüzlerde pozitif, yatay yüzlerde negatiftir.

$x'$ - $y'$  eksen takımına sahip sağdaki düzlem elemanın bir yüzeyinde pozitif yönlü normal gerilme ve kayma gerilmesi görülmektedir.

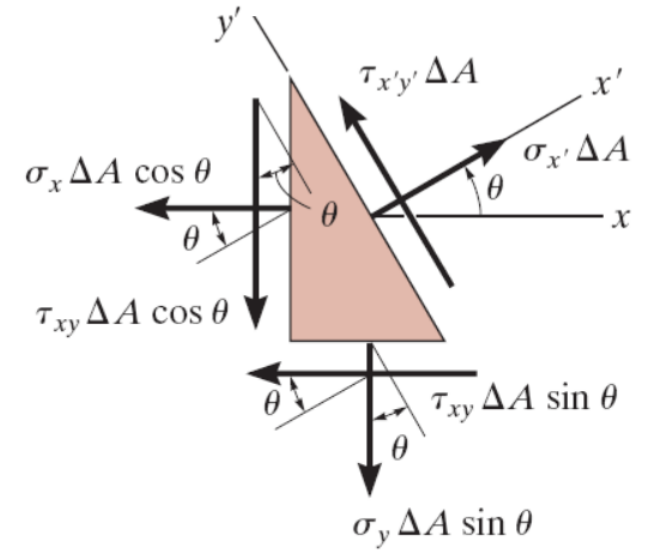
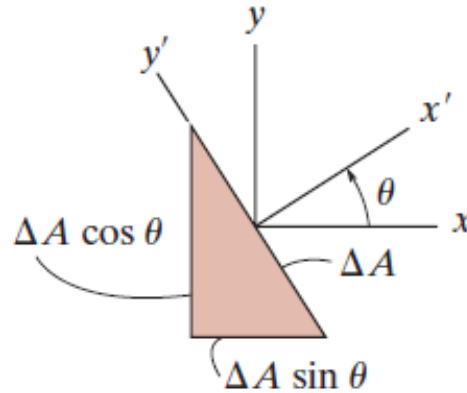
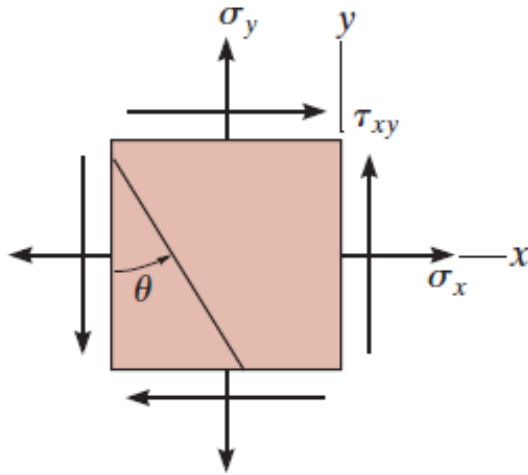
Aşağıda verilen  $\theta$  açısı da, saat yönünün tersine olduğunda pozitif işaretli olarak kabul edilir. Yani sağdaki düzlem elemanı elde etmek için, solda verilen düzlem elemanın  $+30^\circ$  döndürüldüğü kabul edilir.



### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.2. Düzlem Gerilme Dönüşümünün Genel Denklemleri

**Normal gerilme ve kayma gerilmesi bileşenleri:**  $x$ - $y$  eksen takımına sahip bir düzlem gerilme elemanı için  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  biliniyor olsun. Düşey ile  $\theta$  açısı yapan bir yüzeydeki gerilmeler bulunmak istensin. Normali  $x'$  eksenini olan bu yüzeyi de içeren şekilde bir üçgen parçası çıkarılır.  $x'$ - $y'$  eksenini de  $x$ - $y$  eksenini ile pozitif yönde  $\theta$  açısı yapmış olacaktır. Üçgen parçasının serbest cisim diyagramı aşağıda verilmiştir.  $x'$  ve  $y'$  eksenleri için denge denklemleri yazılırsa, ilgili yüzeydeki normal gerilme ve kayma gerilmesinin hesabı için kullanılacak dönüşüm denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.



$$+\nearrow \sum F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta \\ - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$+\nwarrow \sum F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta \\ - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta = 0$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.2. Düzlem Gerilme Dönüşümünün Genel Denklemleri

Pratik olarak, normali +x eksenine ile pozitif yönde (saat yönünde)  $\theta$  açısı yapan yüzeydeki gerilmeleri elde etmek için kullanılan gerilme dönüşüm denklemleri, trigonometrik bilgiler kullanılarak çift açılar cinsinden aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

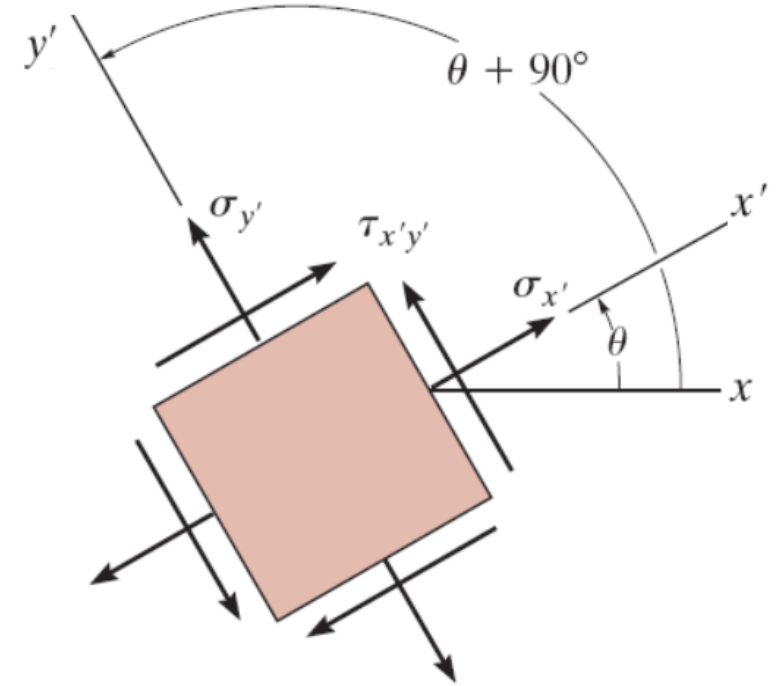
$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy}(2 \sin \theta \cos \theta)$$
$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$$

$$\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



Normali  $y'$  eksenine olan yüzeydeki gerilmeleri hesaplamak için yukarıda verilen genel denklemlerde  $\theta$  açısı yerine  $\theta+90^\circ$  yazılmalıdır. Çünkü  $y'$  eksenine ile +x eksenine arasında pozitif olarak  $\theta+90^\circ$  açı vardır. Bu yüzeydeki kayma gerilmesi, normali  $x'$  eksenine olan yüzeydeki kayma gerilmesine eşit ve zıt yönlü olacaktır. Bu yüzeydeki normal gerilme için çift açılar cinsinden düzenlenmiş denklem de aşağıdaki şekildedir.

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.3. Asal Gerilmeler ve Düzlem İçi Maksimum Kayma Gerilmesi

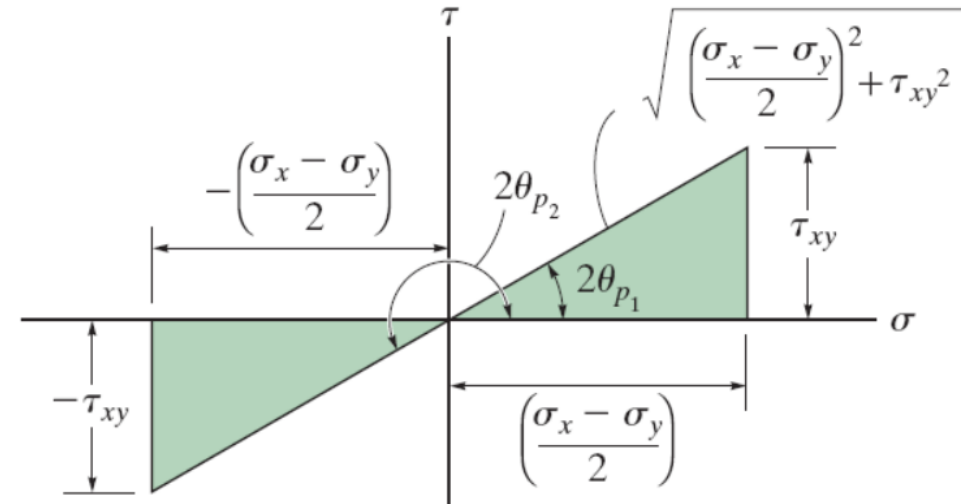
Dönüşüm denklemlerinde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  sabittir. Dolayısıyla herhangi bir yüzey için hesaplanacak gerilmelerin değeri, yüzey normalinin +x eksenine yaptığı  $\theta$  açısına bağlıdır. Pratik mühendislik uygulamalarında,  $\theta$  açısına bağlı olarak değişen normal gerilme ve kayma gerilmesinin maksimum değerlerinin ve yönünün belirlenmesi gerekir.

**Düzlem içi asal gerilmeler:** Normal gerilmenin maksimum ve minimum değerinin bulunması için, normal gerilme denkleminin  $\theta$  değişkenine bağlı türevi sıfıra eşitlenir. İfade aşağıdaki şekilde düzenlenebilir. Bu ifadeyi sağlayan iki  $\theta_p$  değeri vardır ( $\theta_{p1}$  ve  $\theta_{p2}$ ). Bunlardan birincisi maksimum normal gerilmenin, diğeri ise minimum normal gerilmenin yönünü ifade eder.

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2 \sin 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_p$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$



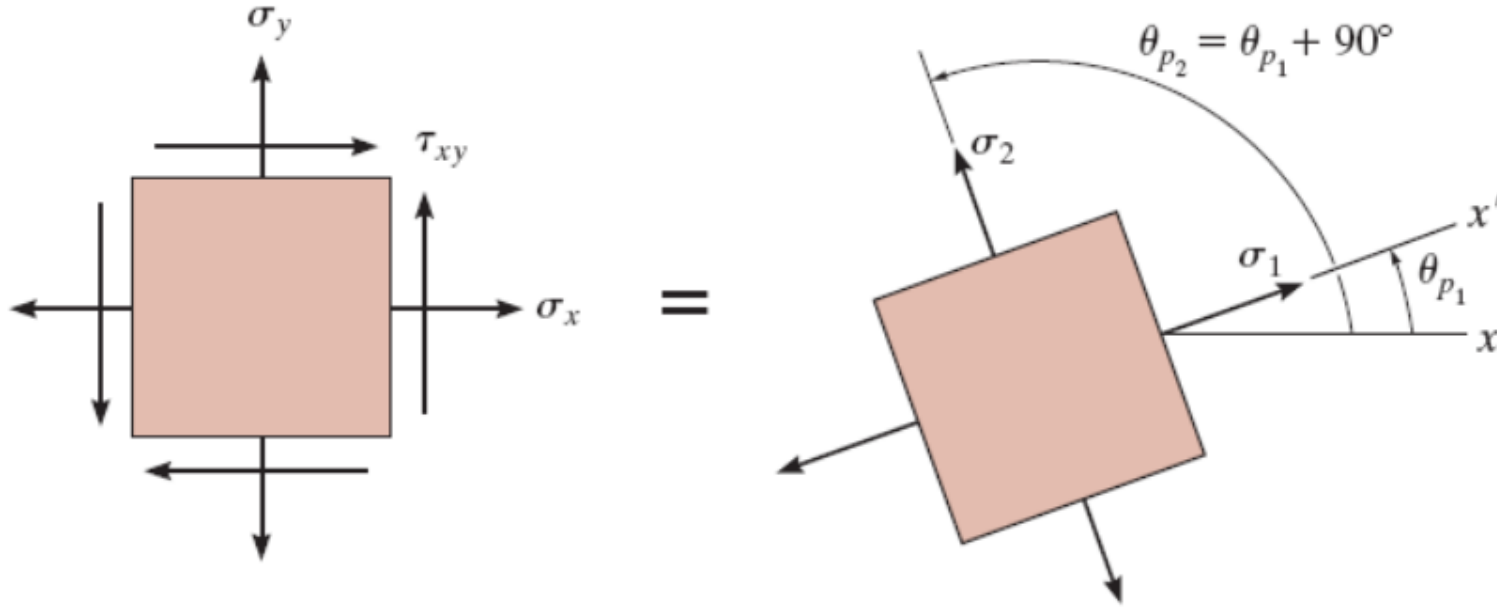
$\theta_{p1}$  ve  $\theta_{p2}$  değerleri, normal gerilme ile ilgili dönüşüm denkleminde kullanılarak elde edilecek maksimum ve minimum normal gerilme ifadeleri yandaki şekilde düzenlenebilir.  $\sigma_1 > \sigma_2$  olacak şekilde elde edilen düzlem içi maksimum ve minimum normal gerilmelere asal gerilmeler adı verilir. Bu gerilmeler ile ilişkili düzlemlere ise asal düzlemler adı verilir.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.3. Asal Gerilmeler ve Düzlem İçi Maksimum Kayma Gerilmesi

$\theta_p$  değerleri, kayma gerilmesi ile ilgili dönüşüm denkleminde yerine yazılırsa, kayma gerilmesi değeri «sıfır» olarak elde edilir. Dolayısıyla, asal gerilmelerin bulunduğu asal düzlemlerde kayma gerilmesinin değeri sıfırdır. Aşağıdaki şekilde, solda verilen düzlem gerilme durumu için, asal gerilmeleri içerecek şekilde yönlendirilmiş düzlem elemanda eşdeğer gerilme durumu verilmiştir. Daha önce de belirtildiği gibi, yüzeylerin doğrultusunu belirleyen  $\theta_p$  değerleri +x ekseninden itibaren ölçülmektedir.



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

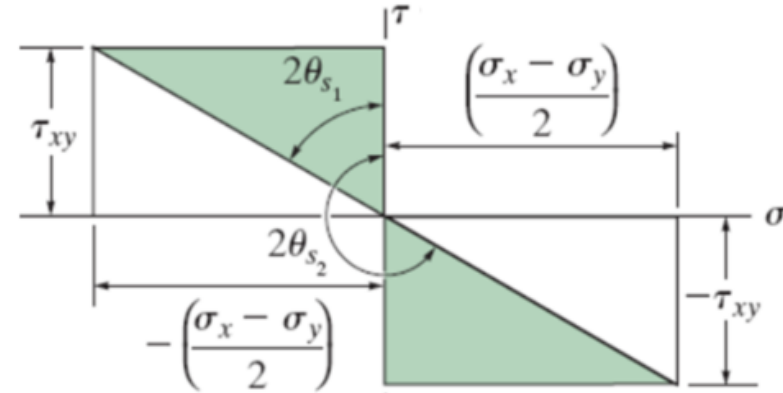
### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.3. Asal Gerilmeler ve Düzlem İçi Maksimum Kayma Gerilmesi

Kayma gerilmesi ile ilgili dönüşüm denkleminin  $\theta$  değişkenine göre türevi sıfıra eşitlenip, maksimum kayma gerilmesi etkisindeki düzlemin yönünü temsil eden  $\theta_s$  değeri için aşağıdaki ifade bulunabilir. Aşağıda verilen taralı üçgenlerden de görülebileceği gibi, verilen ifadeyi sağlayan iki  $\theta_s$  değeri vardır ( $\theta_{s1}$  ve  $\theta_{s2}$ ). Bunlardan birincisi maksimum kayma gerilmesinin, diğeri ise minimum kayma gerilmesinin yönünü ifade eder.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

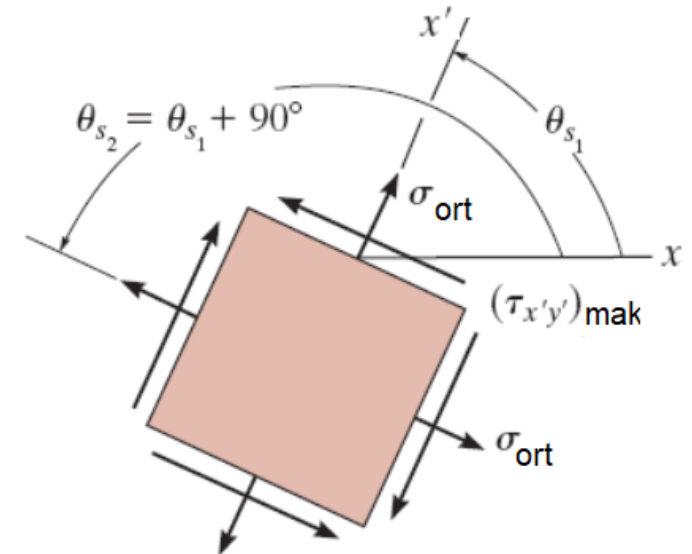
$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$



$\theta_s$  değerleri, kayma gerilmesi ile ilgili dönüşüm denkleminde kullanılarak, x-y düzlemi içerisindeki maksimum kayma gerilmesi ifadesi bulunur ve aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.  $\theta_s$  değerleri, normal gerilme ile ilgili dönüşüm denkleminde kullanılırsa, ortalama normal gerilme ( $\sigma_{ort}$ ) değeri elde edilir. Yani, maksimum ve minimum kayma gerilmesinin olduğu yüzeylerde ortalama normal gerilme bulunur.

$$\tau_{mak} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



### 3- Gerilme Dönüşümleri

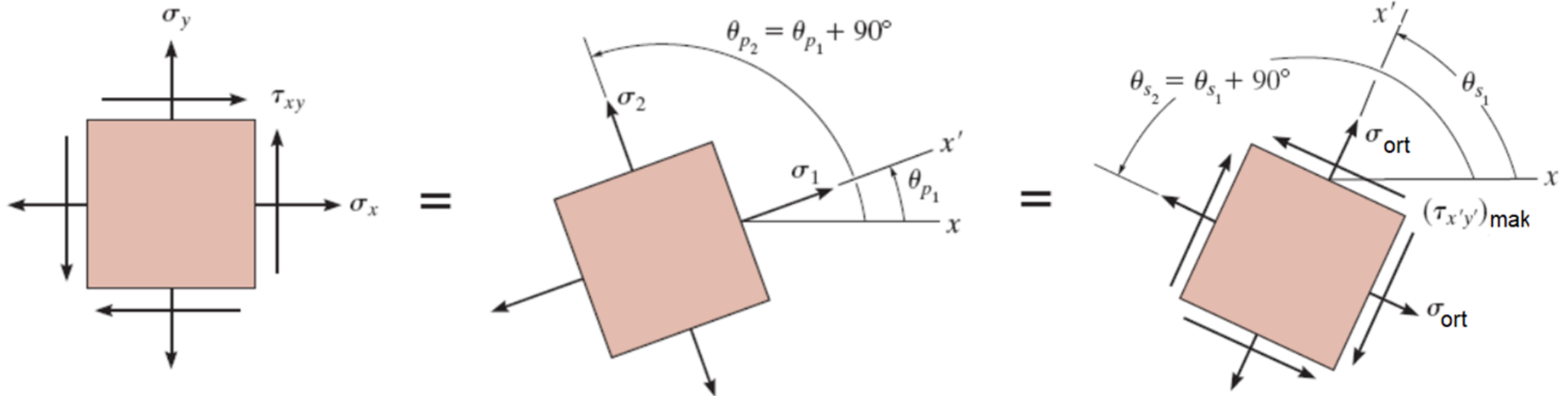
#### 3.3. Asal Gerilmeler ve Düzlem İçi Maksimum Kayma Gerilmesi

Aşağıda verilen ifadelere göre,  $\tan 2\theta_p$  ve  $\tan 2\theta_s$  değerleri, aradaki negatif ilişki ile beraber birbirinin çarpmaya göre tersidir. Buna göre,  $2\theta_s$  açıları ile  $2\theta_p$  açıları arasında  $90^\circ$  olmalıdır. Dolayısıyla  $\theta_s$  açıları ile  $\theta_p$  açıları arasında da  $45^\circ$  olmalıdır.

O halde, asal normal gerilmelerin doğrultuları ile maksimum kayma gerilmelerinin doğrultuları arasında  $45^\circ$  vardır.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$



### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.4. Düzlem Gerilme Durumu İçin Mohr Dairesi

Düzlem gerilme için dönüşüm denklemlerinin nasıl uygulanacağı, grafiksel bir yöntem ile de gösterilebilir. Grafiksel yöntem, herhangi bir düzlemdeki normal gerilme ve kayma gerilmesinin, düzlemin doğrultusuna bağlı olarak nasıl değiştiğini anlamada kolaylık sağlar.

Normal gerilme ve kayma gerilmesi ile ilgili çift açılar cinsinden dönüşüm denklemleri aşağıdaki şekilde yazılsın.

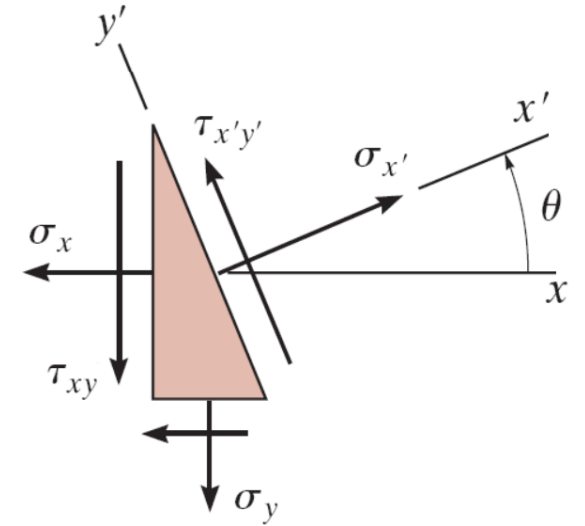
$$\sigma_{x'} - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$
$$\tau_{x'y'} = - \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Denklemlerin kareleri alınır ve birbirleri ile toplanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left[ \sigma_{x'} - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  sabit olduğu için, bu ifade daha da kısa olarak şu şekilde yazılabilir. Eğer yatay  $\sigma$  ve düşey  $\tau$  eksenleri ile temsil edilen bir eksen takımı dikkate alınırsa, aşağıdaki ifade  $R$  yarıçapına sahip ve merkezi  $C(\sigma_{ort}, 0)$  noktasında olan bir dairenin denklemini ifade eder. Daire, Alman mühendis Otto Mohr tarafından geliştirildiği için Mohr Dairesi olarak bilinir.

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ort})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$
$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



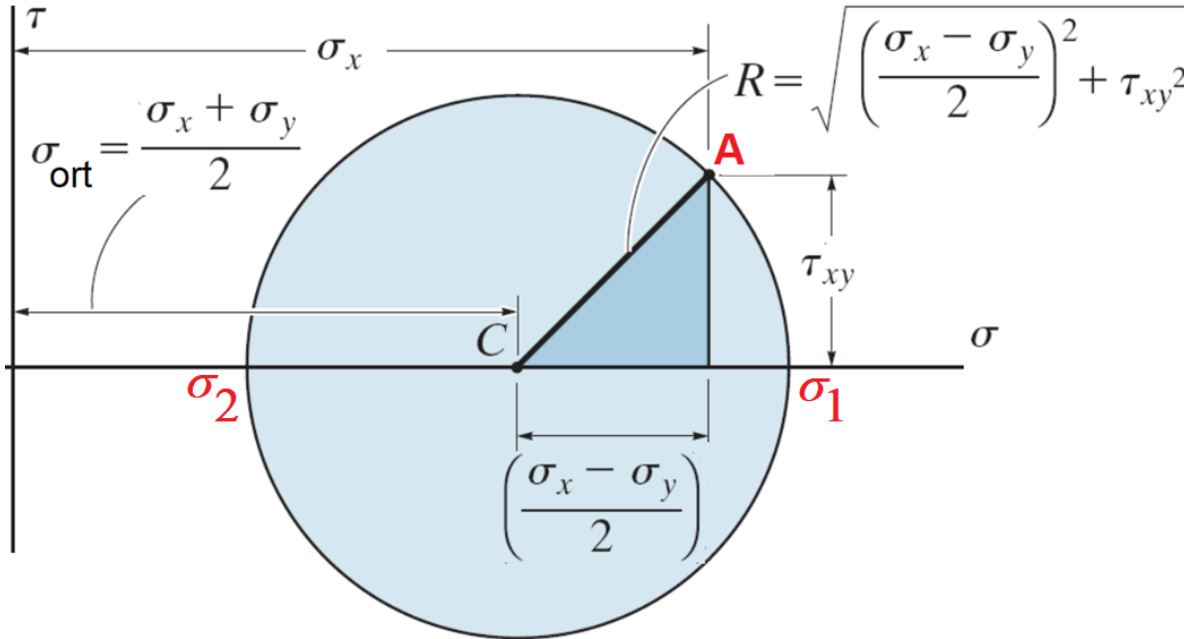
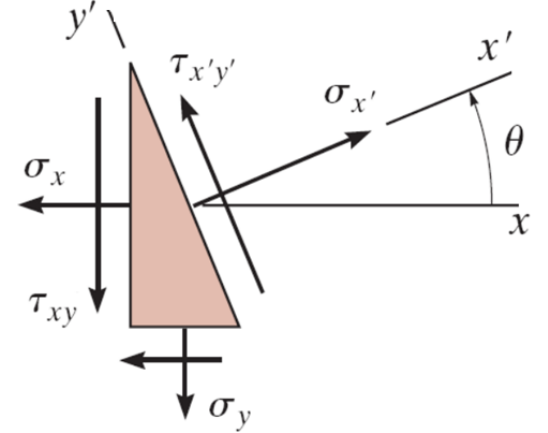
### 3- Gerilme Dönüşümleri

#### 3.4. Düzlem Gerilme Durumu İçin Mohr Dairesi

Mohr Dairesi üzerindeki her bir nokta, ilgili  $\theta$  açısı ile yönlendirilmiş düzlemdeki normal gerilme ve kayma gerilmesini temsil eder. Örneğin  $\theta=0$  alınırsa, normal  $+x$  eksenine olan düzleme ait gerilmelerin ( $\sigma_x$  ve  $\tau_{xy}$ ) daire üzerinde temsil ettiği nokta  $A(\sigma_x, \tau_{xy})$  elde edilir. A noktası genellikle referans nokta olarak kabul edilir.

Bir referans düzlem ile eşdeğer gerilmelerin arandığı başka bir düzlem arasındaki açı  $\theta$  ise, bu düzlemdeki eşdeğer gerilmelerin dairede temsil ettiği noktaya ulaşmak için, referans düzlemin dairede temsil ettiği noktadan itibaren daire üzerinde ters yönde  $2\theta$  açısı kadar ilerlenir.

Daire üzerindeki referans noktadan (örneğin A noktası), asal normal gerilmenin (örneğin  $\sigma_1$ ) bulunduğu düzlemin daire üzerinde temsil ettiği noktaya gitmek için ilerlenmesi gereken açıya asal doğrultman (aşağıdaki koyu taralı üçgende C açısı) denir.



Aralarında  $90^\circ$  açı olan düzlemlerdeki gerilmelerin daire üzerinde temsil ettiği noktalar arasında  $180^\circ$  açı vardır.

Asal normal gerilmelerin bulunduğu düzlem ile maksimum kayma gerilmelerinin bulunduğu düzlem arasındaki açı  $45^\circ$  olduğu için, bu düzlemlerdeki gerilmelerin Mohr Dairesi'nde temsil ettiği noktalar arasında  $90^\circ$  açı bulunur.

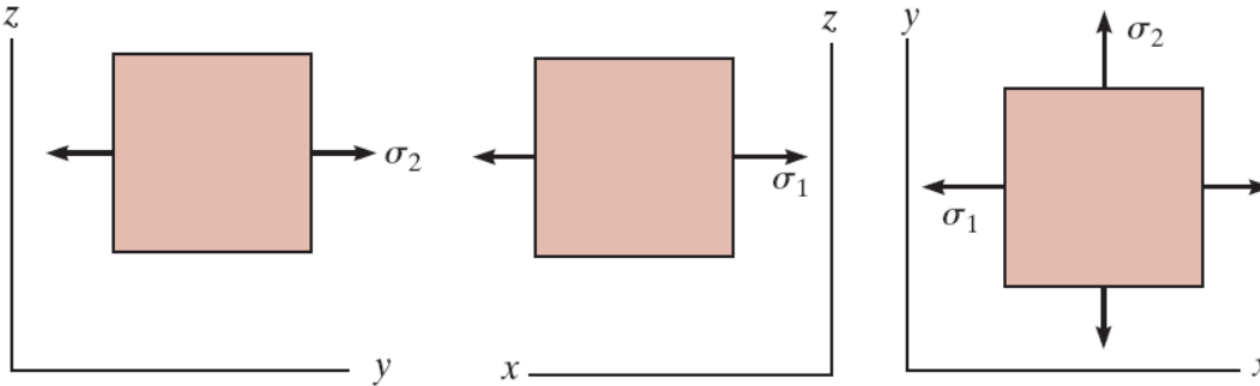
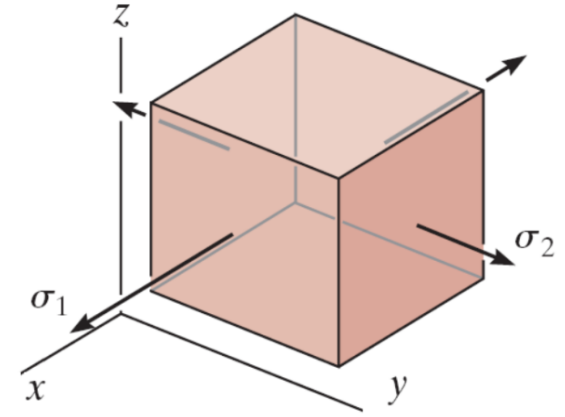
Daire üzerindeki maksimum ve minimum  $\sigma$  değerleri asal normal gerilmelerdir. Maksimum kayma gerilmesi, görüldüğü gibi dairenin yarıçapına eşittir.

### 3- Gerilme Dönüşümleri

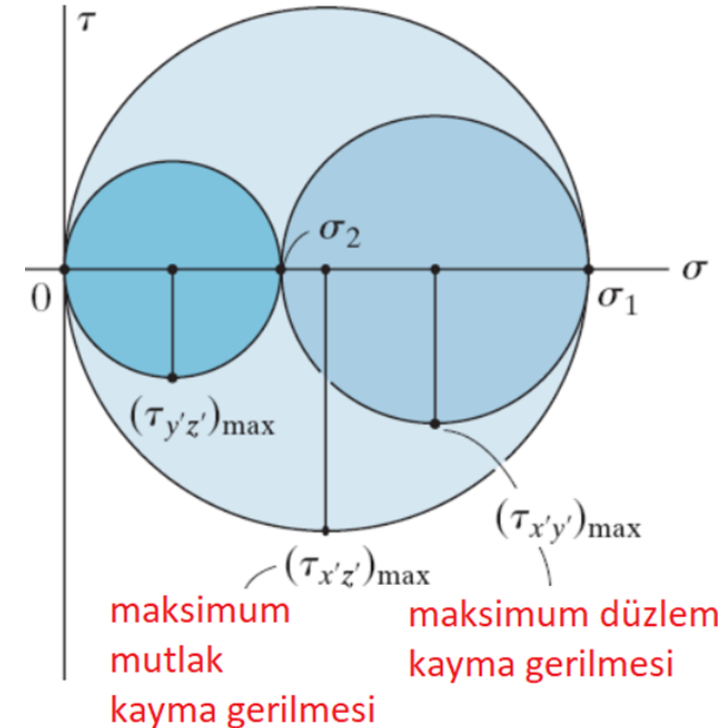
#### 3.5. Maksimum Mutlak Kayma Gerilmesi

Yüklemeye altındaki bir malzemenin etkisi altında olduğu maksimum mutlak kesme kuvvetinin bilinmesi gerekir. Bunun belirlenmesine örnek olarak sağda verilen x-y düzlem gerilme durumu seçilmiştir. Gerilme durumunda verilen asal gerilmelerin ikisi de pozitif işaretlidir.

Eğer cismin x-y, x-z ve y-z düzlemlerindeki görünüşleri dikkate alınırsa, bu düzlemlerdeki maksimum kayma gerilmesi değerleri Mohr Dairesi yardımı ile belirlenebilir ve aşağıda yanda verilen şekilde gösterilebilir. Örneğin y-z düzlemi için maksimum düzlem içi kayma gerilmesi  $\sigma_2/2$  olur. Maksimum düzlem içi kayma gerilmelerinin en büyüğüne de maksimum mutlak kayma gerilmesi adı verilir. Bu düzlem gerilme durumu için maksimum mutlak kayma gerilmesinin  $\sigma_1/2$  olduğu görülebilir.



$$\tau_{\text{mut mak}} = \frac{\sigma_1}{2}$$



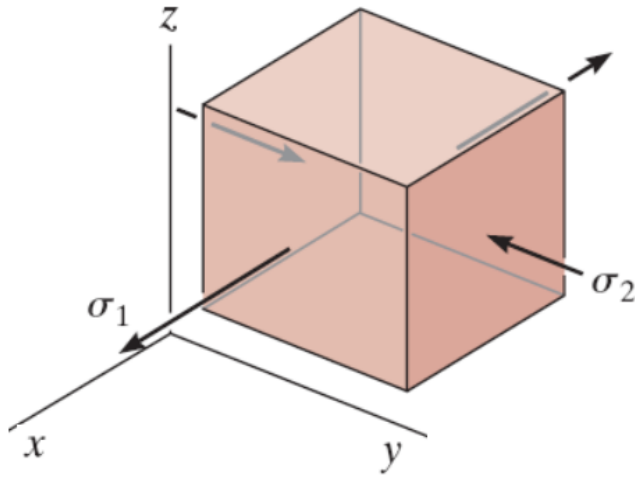


### 3- Gerilme Dönüşümleri

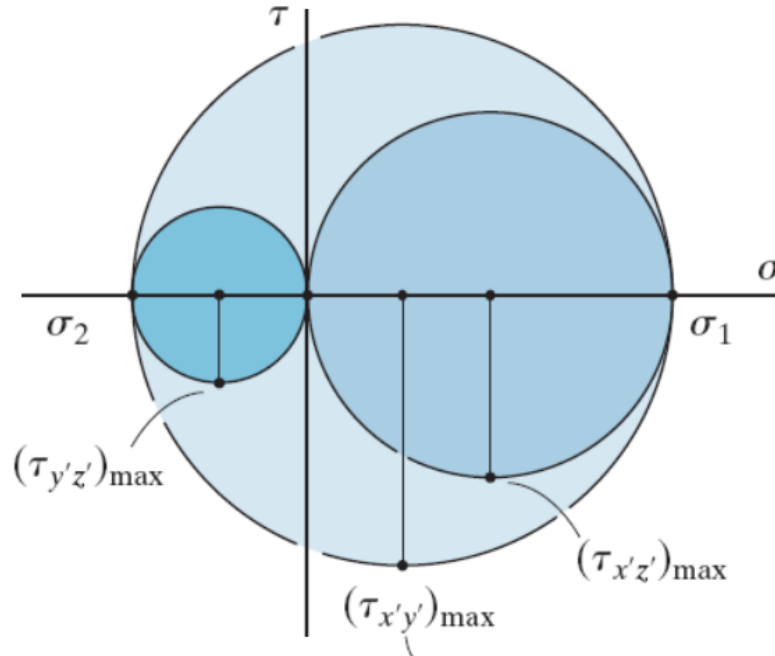
#### 3.5. Maksimum Mutlak Kayma Gerilmesi

Örnek olarak seçilen x-y düzlem gerilme durumundaki asal gerilmelerin işaretinin farklı olduğu durum dikkate alınsın.

Cismin x-y, x-z ve y-z düzlemlerindeki maksimum düzlem içi kayma gerilmesi değerleri yine Mohr Dairesi yardımı ile belirlenebilir ve aşağıda verilen şekilde gösterilebilir. y-z düzlemi için maksimum düzlem içi kayma gerilmesi  $\sigma_2/2$  olur ancak işareti negatiftir. Bu düzlem gerilme durumu için maksimum mutlak kayma gerilmesinin  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$  olduğu görülebilir.



x-y düzlem gerilme durumu



maksimum düzlem içi kayma gerilmesi  
ve maksimum mutlak kayma gerilmesi

$$\tau_{\text{mut mak}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

**Örnek 3-3:** Şekilde görülen düzlem elemandaki gerilme durumunu dikkate alarak, normali yatayla saat yönünde  $\theta=30^\circ$  açı yapan düzlemde normal gerilme ve kayma gerilmesini gerilme dönüşüm bağıntılarını kullanarak hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$\theta = -30^\circ \quad \sigma_x = -80 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

Çift açılar cinsinden dönüşüm bağıntıları (saat yönünde dönme,  $\theta = -30^\circ$  için) kullanılarak DC düzlemi için gerilmeler:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = -15 + (-65) \cos(-60) + (-25) \sin(-60) = -25.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(-65) \sin(-60) + (-25) \cos(-60) = -68.8 \text{ MPa}$$

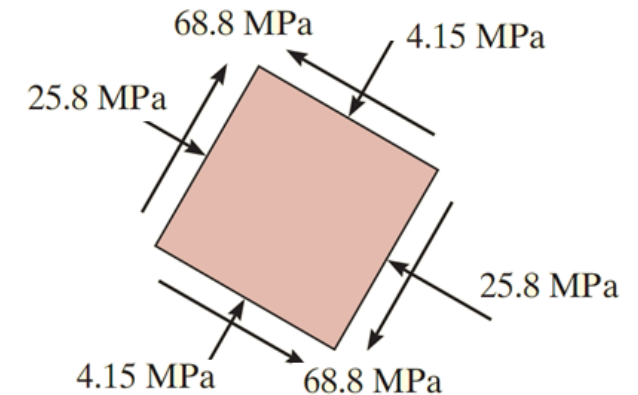
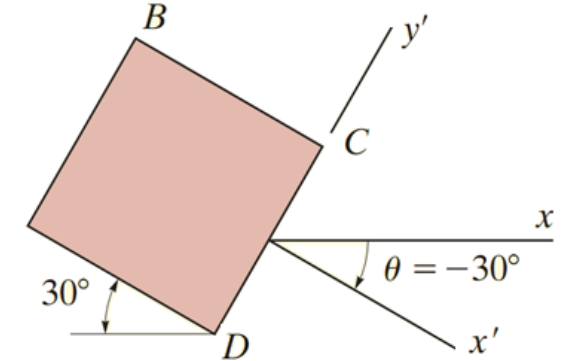
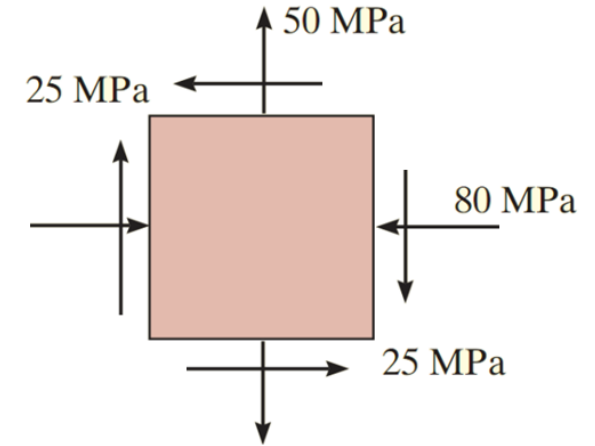
Dönüşüm bağıntıları kullanılarak, normali yatayla  $60^\circ$  açı yapan BC düzleminde de gerilmeler bulunabilir.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = -15 + (-65) \cos(120) + (-25) \sin(120) = -4.15 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(-65) \sin(120) + (-25) \cos(120) = 68.8 \text{ MPa}$$



**Örnek 3-4:** Düzlem elemandaki gerilme durumunu dikkate alıp, asal normal ve kayma gerilmelerini bularak, yönlendirilmiş düzlem eleman üzerinde gösteriniz.

**Çözüm:**

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Asal gerilmeler:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 35 \pm 81.4 \quad \sigma_1 = 116 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -46.4 \text{ MPa}$$

Asal doğrultman (saat yönünün tersi yön pozitiftir):

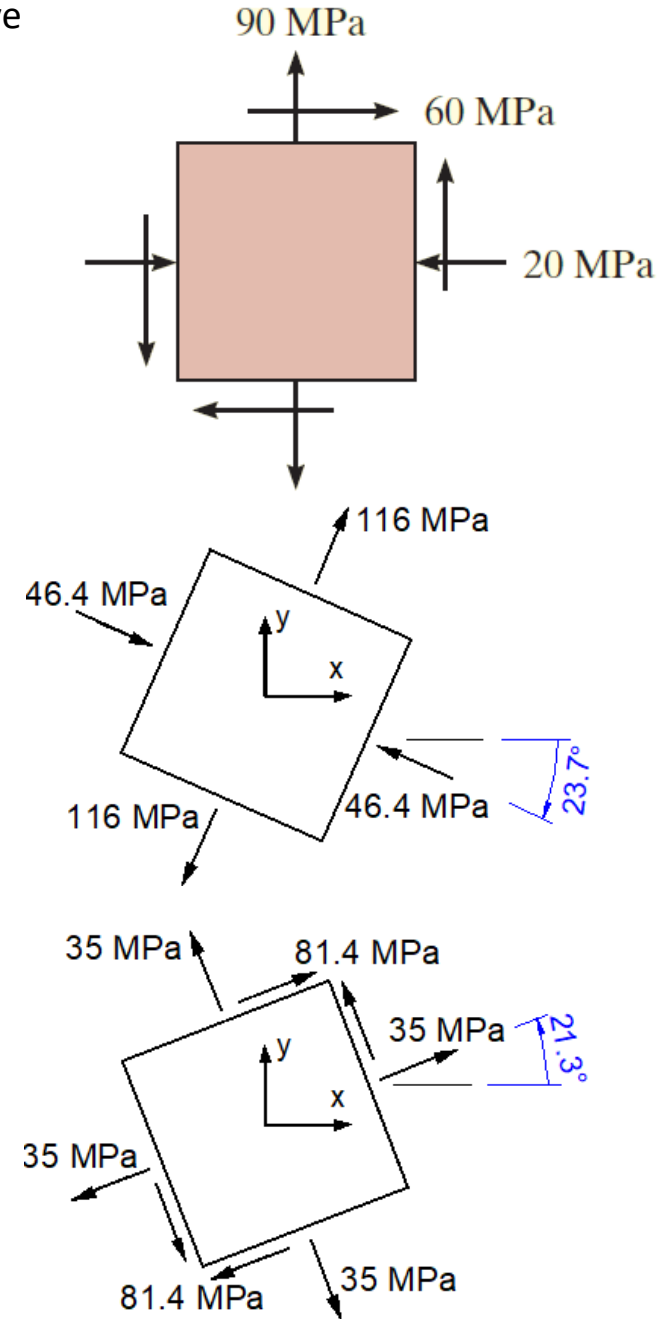
$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{120}{-20 - 90} = -1.091 \quad \theta_0 = -23.74^\circ$$

Maksimum kayma gerilmesi ve doğrultusu ile ortalama normal gerilme:

$$\tau_{mak} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2} = 81.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

Not: Asal normal gerilmeler ile asal kayma gerilmelerinin doğrultusu arasında  $45^\circ$  açı bulunmaktadır.



**Örnek 3-8:** Verilen gerilme durumuna ait Mohr dairesini çiziniz. Asal normal ve kayma gerilmelerini bularak, yönlendirilmiş düzlem eleman üzerinde gösteriniz.

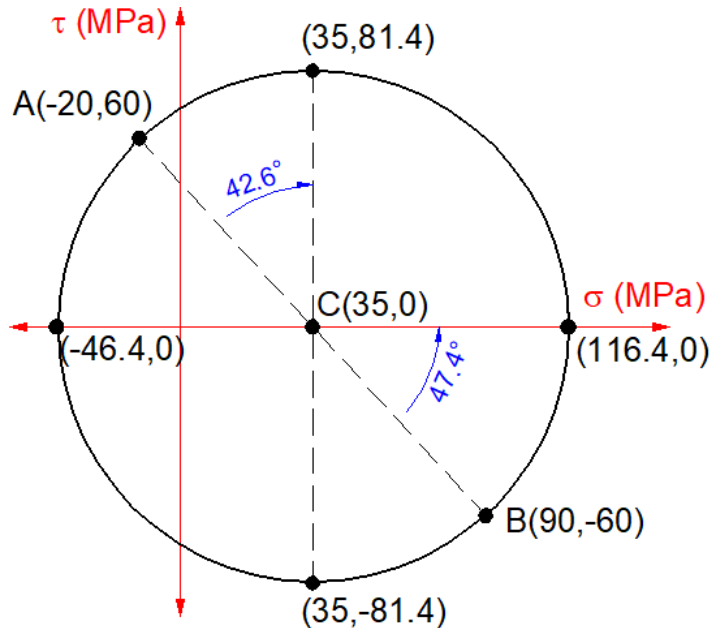
**Çözüm:**

Verilen gerilme durumu için Mohr dairesi üzerinde referans noktalar:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} , \sigma_y = 90 \text{ MPa} , \tau_{xy} = 60 \text{ MPa} \rightarrow A(-20,60) , B(90,-60)$$

Mohr dairesinin merkezi ve yarıçapı belirlenerek daire çizilebilir:

$$\sigma_{ort} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa} \quad R = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2} = 81.4 \text{ MPa}$$



Asal gerilmeler ve asal doğrultman:

$$\sigma_1 = 35 + 81.4 = 116.4 \text{ MPa}$$

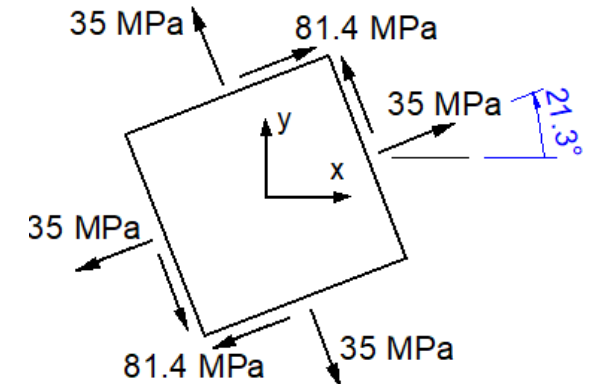
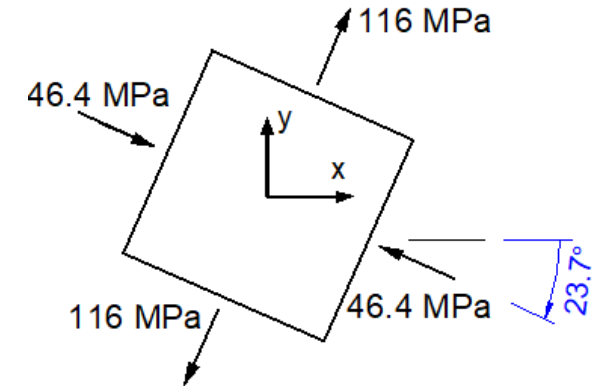
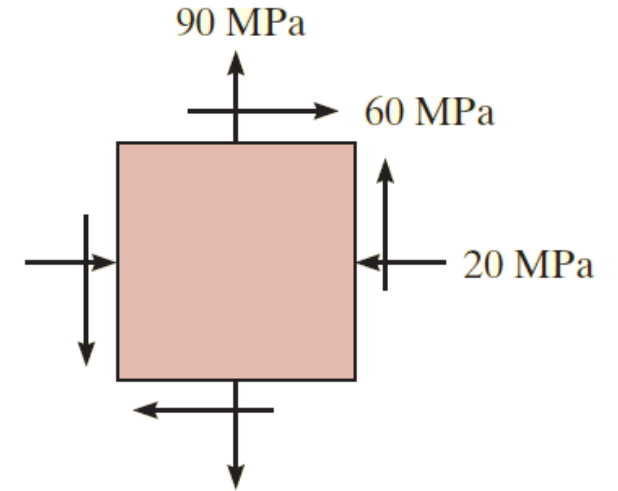
$$\sigma_2 = 35 - 81.4 = -46.4 \text{ MPa}$$

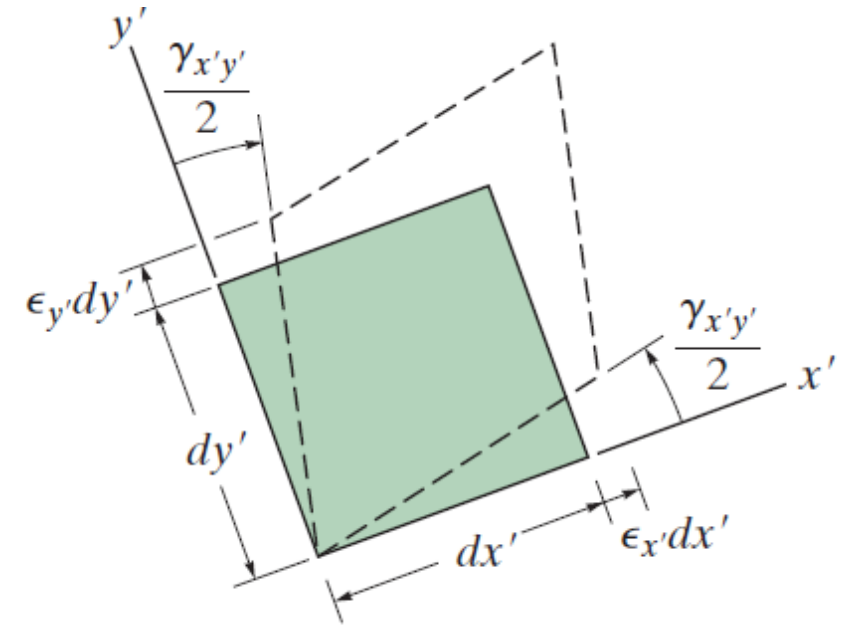
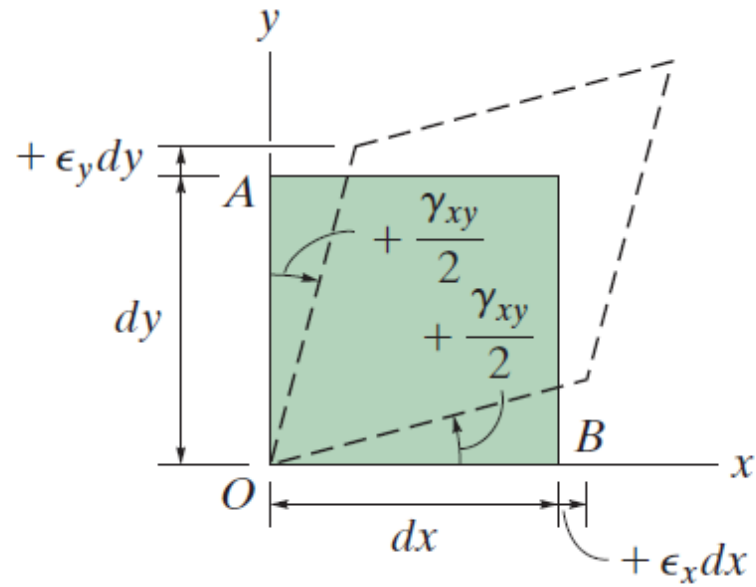
$$\tan 2\phi = \frac{2 * 60}{-20 - 90} = -1.09 , 2\phi = -47.4^\circ$$

$$\phi = -23.7^\circ$$

$$\tau_{mak} = R = 81.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{min} = -R = -81.4 \text{ MPa}$$





## 4- şekil değiştirme dönüşümleri

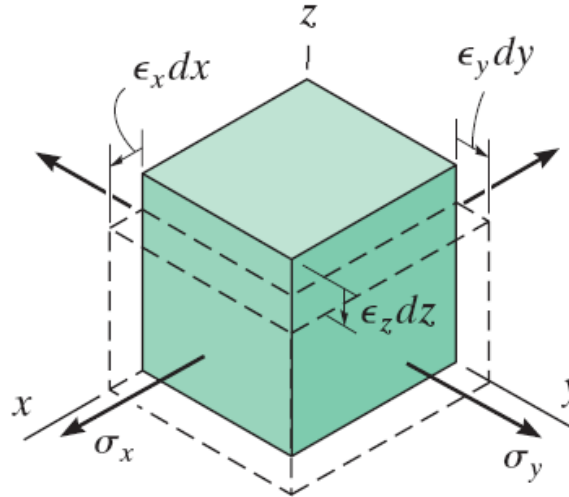
## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

### 4.1. Düzlem Şekil Değiştirme

Bir cismin bünyesindeki herhangi bir noktadaki şekil değiştirme durumunu tanımlayan altı şekil değiştirme bileşeni vardır. Normal şekil değiştirme bileşenleri ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve  $\epsilon_z$ ) cismin boyutlarının ve hacminin değişmesine sebep olurken, kayma açıları ( $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$ ) cismin şeklinin değişmesine sebep olmaktadır.

Gerilmede olduğu gibi, şekil değiştirmenin bileşenleri de dikkate alınan birim elemanın yönelmesine bağlıdır. Bu sebeple, farklı yönlendirilmiş elemanlar için şekil değiştirmelerin dönüştürülmesi gerekir.

$x$ - $y$  düzlemi dikkate alındığında, düzlem şekil değiştirmenin üç bileşeni bulunur:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$ . Düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirmenin aynı düzlemde tanımlanmış üçer bileşeni bulunmaktadır. Ancak, düzlem gerilme durumunun her zaman düzlem şekil değiştirmeye sebep olma gerekliliği yoktur. Yandaki şekilde görüldüğü gibi  $x$ - $y$  düzlem gerilme durumunda sadece  $\epsilon_x$  ve  $\epsilon_y$  değil  $\epsilon_z$ 'de sıfırdan farklı olabilir. Bu duruma, daha sonra değinilecek olan Poisson etkisi sebep olur.



Düzlem şekil değiştirme analizi için, herhangi bir noktada farklı olarak yönlendirilmiş elemanlar üzerinde eşdeğer şekil değiştirme bileşenlerinin hesaplanması amacıyla kullanılacak dönüşüm denklemlerinin elde edilmesi gerekir.

## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

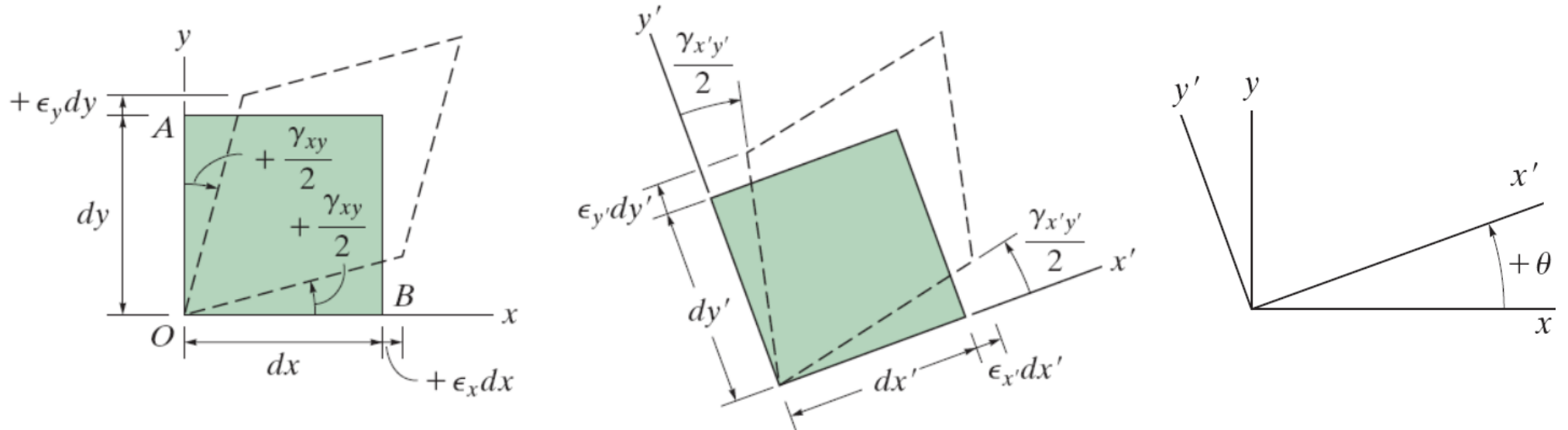
### 4.2. Düzlem Şekil Değiştirme Dönüşümünün Genel Denklemleri

$x$ - $y$  eksen takımına sahip düzlem eleman için şekil değiştirme bileşenleri  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$  biliniyor olsun. Herhangi bir  $x'$ - $y'$  eksen takımına sahip düzlem elemandaki eşdeğer şekil değiştirmeleri bulmak için şekil değiştirme dönüşümü denklemleri kullanılabilir.

**İşaret kabulü:** Denklemleri kullanmak için şekil değiştirmelere ait işaret kabulünün bilinmesi gerekir. Aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi, herhangi bir doğrultudaki birim uzama ( $\epsilon_x$  veya  $\epsilon_y$ ), cismin boyutunda artmaya sebep oluyorsa pozitif işaretli olarak kabul edilir. Dik olan AOB açısı şekil değiştirme sonrasında küçülmüş ise kayma açısı ( $\gamma_{xy}$ ) pozitif işaretli olarak kabul edilir.

Esas olarak bu işaret kabulü, düzlem gerilme bileşenlerini işaret kabulü ile ilişkilidir. Yani pozitif işaretli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  gerilmeleri cisimde pozitif  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$  şekil değiştirme bileşenlerinin oluşmasına sebep olur.

$x$ - $y$  eksen takımı ile  $x'$ - $y'$  eksenleri arasındaki  $\theta$  açısı, saat yönünün tersine ise pozitif işaretli kabul edilir.



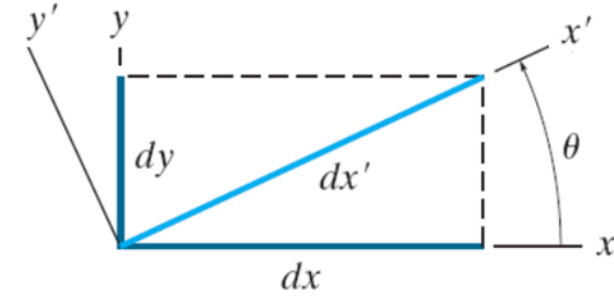
## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

### 4.2. Düzlem Şekil Değiştirme Dönüşümünün Genel Denklemleri

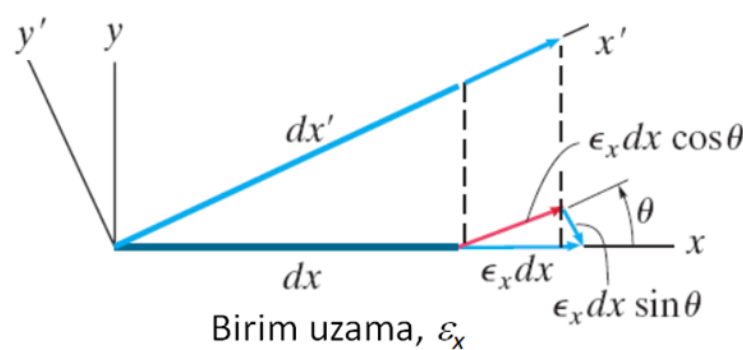
**Birim uzama:**  $\epsilon_{x'}$  ve  $\epsilon_{y'}$  ifadelerini bulmak için  $x'$  doğrultusunda uzanan  $dx'$  doğru parçasının ve  $y'$  doğrultusunda uzanan  $dy'$  doğru parçasının  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$  etkisinde boy değişimi belirlenmelidir. Deformasyon öncesi durum dikkate alınarak  $dx$  ve  $dy$  için yandaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} dx &= dx' \cos \theta \\ dy &= dx' \sin \theta \end{aligned}$$

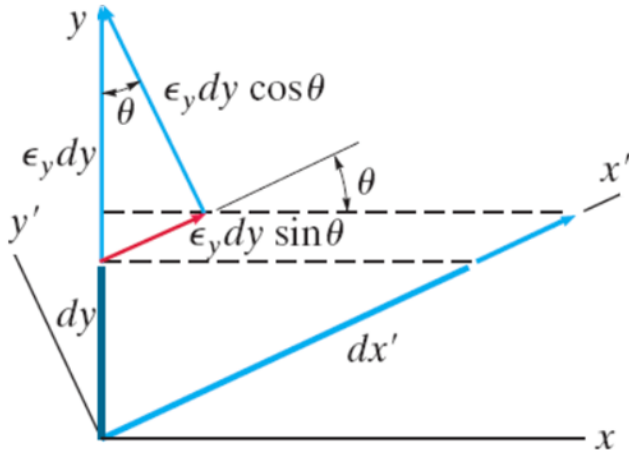
$$\begin{aligned} dx &= dy' \sin \theta \\ dy &= dy' \cos \theta \end{aligned}$$



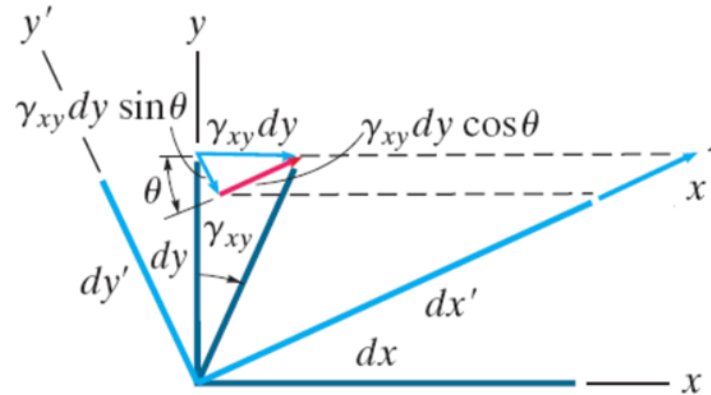
Deformasyon öncesi



Birim uzama,  $\epsilon_x$



Birim uzama,  $\epsilon_y$



Kayma açısı,  $\gamma_{xy}$

$\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$  dolayısıyla  $dx'$  ve  $dy'$  doğru parçalarında meydana gelecek boy değişimi şekillerde ayrı ayrı verilmiştir.

Bu üç etki dolayısıyla meydana gelecek boy değişimleri toplanarak,  $dx'$  ve  $dy'$  doğru parçalarında toplam boy değişimi ( $\delta x'$  ve  $\delta y'$ ) bulunabilir.

Toplam boy değişiminin, ilgili doğru parçasının başlangıçtaki boyuna bölümü ile de  $x'$  ve  $y'$  doğrultusunda birim uzamalar ( $\epsilon_{x'}$  ve  $\epsilon_{y'}$ ) elde edilir.

$\epsilon_{x'}$  ifadesinde  $\theta$  yerine  $(\theta + 90)$  yazarak da  $\epsilon_{y'}$  ve değeri elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \delta x' &= \epsilon_x dx \cos \theta + \epsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta \\ \epsilon_{x'} &= \delta x' / dx' \\ \epsilon_{x'} &= \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y' &= -\epsilon_x dx \sin \theta + \epsilon_y dy \cos \theta - \gamma_{xy} dy \sin \theta \\ \epsilon_{y'} &= \delta y' / dy' \\ \epsilon_{y'} &= -\epsilon_x \sin^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$



## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

### 4.2. Düzlem Şekil Değiştirme Dönüşümünün Genel Denklemleri

**Kayma açısı:**  $\gamma_{x'y'}$  ifadesini elde etmek için öncelikle aşağıdaki şekilde görülen  $\alpha$  ve  $\beta$  değerlerini belirlemek gerekir. Daha sonra da kayma açısı elde edilir.

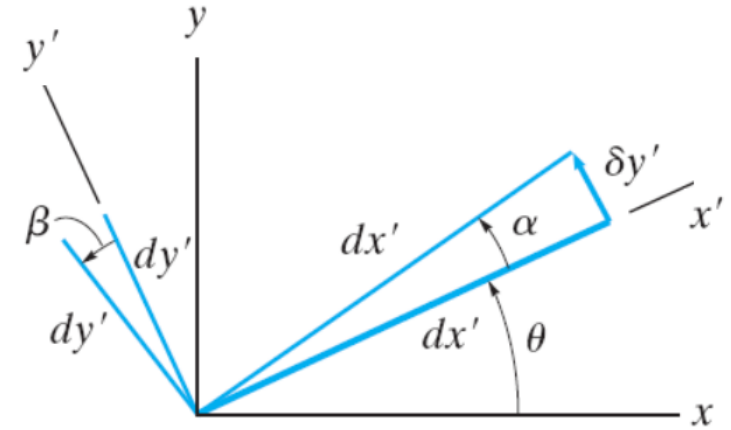
$$\alpha = \frac{\delta y'}{dx'} = (-\epsilon_x + \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta$$

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$$

$$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$$

$$\begin{aligned} \beta &= (-\epsilon_x + \epsilon_y) \sin(\theta + 90^\circ) \cos(\theta + 90^\circ) - \gamma_{xy} \sin^2(\theta + 90^\circ) \\ &= -(-\epsilon_x + \epsilon_y) \cos \theta \sin \theta - \gamma_{xy} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



$$\begin{aligned} dx &= dx' \cos \theta \\ dy &= dx' \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= dy' \cos \theta \\ dy &= dy' \sin \theta \end{aligned}$$

Trigonometrik bağıntılar kullanılarak dönüşüm denklemleri aşağıdaki gibi çift açılar cinsinden ifade edilebilir.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

### 4.2. Düzlem Şekil Değiştirme Dönüşümünün Genel Denklemleri

**Asal birim uzamalar:** Bir noktadaki şekil değiştirme, belirli bir açı ile yönlendirilmiş düzlem elemanda eşdeğer olarak sadece birim uzamalar ile ifade edilir ve kayma açısı oluşmaz. Bu durumda, bu açı ile ilgili birim uzamalara asal birim uzamalar denir. Eğer malzeme izotropik ise asal birim uzamaların doğrultusu aynı zamana asal gerilmelerin de doğrultusudur.

Asal doğrultman denklemi ve asal gerilmelerin denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

**Maksimum düzlemiçi kayma açısı ve ortalama birim uzama:** Cisim bünyesindeki bir noktada maksimum düzlem içi kayma açısı da belirli bir doğrultuda gerçekleşir. Maksimum kayma açısı ve ilgili ortalama birim uzama denklemleri de aşağıda verilmiştir..

$$\frac{\gamma_{\text{mak}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{\text{ort}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Maksimum kayma açısının doğrultusu da aşağıdaki ifade ile elde edilir.

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right)$$

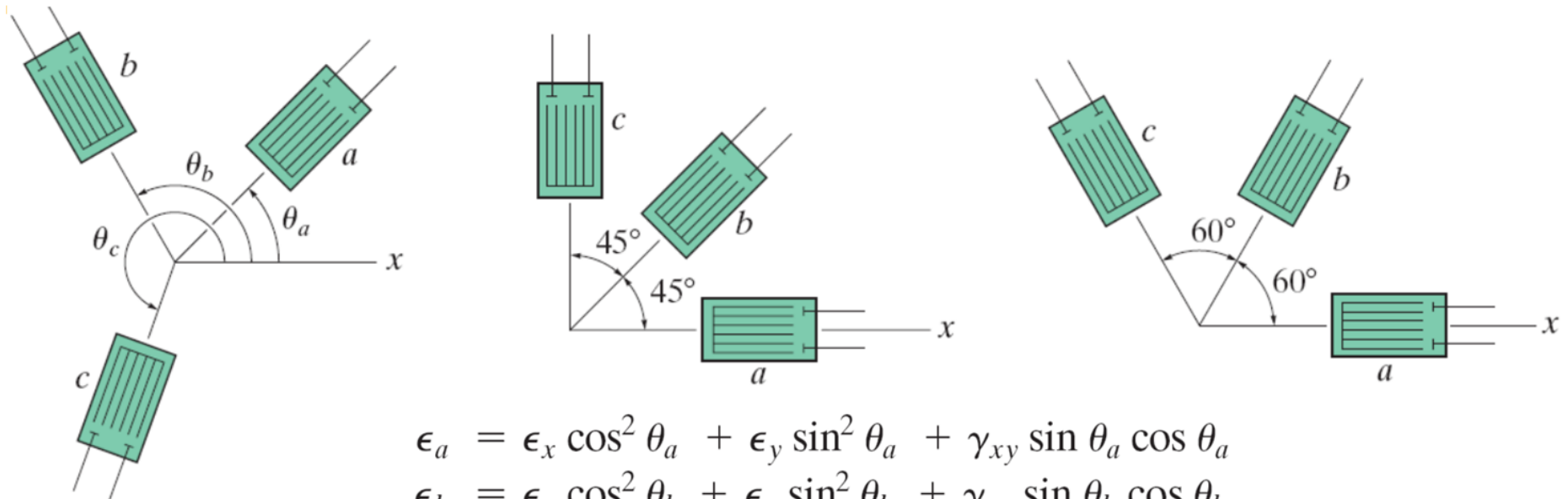
## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

### 4.3. Birim Uzama Rozetleri

Bir cismin yüzeyindeki bir noktada belirli bir doğrultuda birim uzamaların deneysel olarak ölçülmesi amacı ile elektrik direncine bağlı olarak ölçüm yapan birim uzama ölçerler kullanılmaktadır.

Yük etkisi altındaki bir cisimde belirli bir noktada düzlem şekil değiştirme bileşenlerinin ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ) belirlenmesi gerekebilir. Ancak düzlem içi kayma açısının ölçülebilmesi mümkün değildir. Bu sebeple, şekil değiştirme bileşenlerinin belirlenmesi için üç doğrultuda birim uzama değeri ölçülmektedir. Bunun için, üç doğrultuda birim uzama ölçerin üzerine yerleştirildiği rozet denilen malzemeler kullanılmaktadır. Rozetler, üzerindeki üç birim uzama ölçerin doğrultularına göre isimlendirilmektedir.

Rozetler yardımı ile üç doğrultuda ölçülen birim uzamalar, aranan üç şekil değiştirme bileşenine bağlı üç dönüşüm denklemi olarak aşağıdaki gibi ifade edilmekte ve denklem sisteminin çözümünden aranan şekil değiştirme bileşenleri ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ) hesaplanmaktadır.



$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c\end{aligned}$$

## 4- Şekil Değiştirme Dönüşümleri

### 4.4. Birim Şekil Değiştirme İçin Mohr Dairesi

Birim şekil değiştirmeler için dönüşüm denklemleri, gerilmeler için kullanılan dönüşüm denklemlerine benzer. Bu yüzden, gerilme konusuna benzer şekilde, eşdeğer şekil değiştirmeler de Mohr Dairesi kullanılarak bulunabilir.

Dairenin çizilmesi için yatay eksen asal birim uzamayı ve dikey eksen kayma açısını (kayma açısının yarısı) temsil eder.

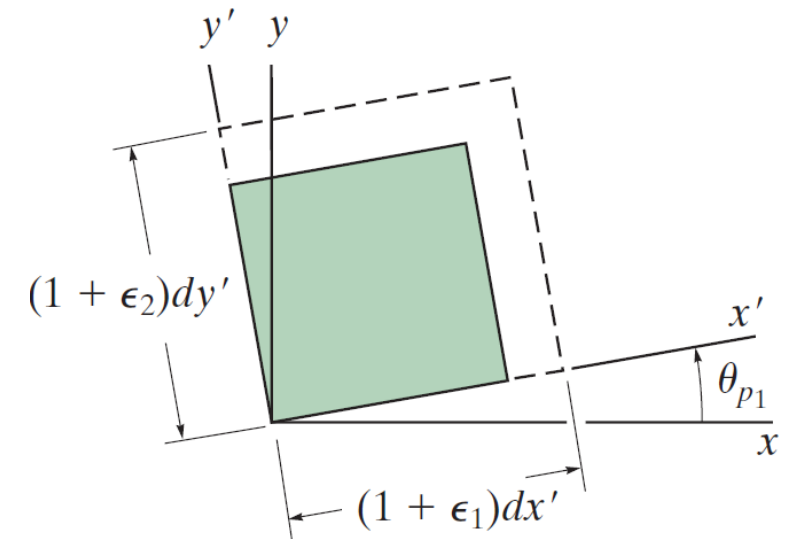
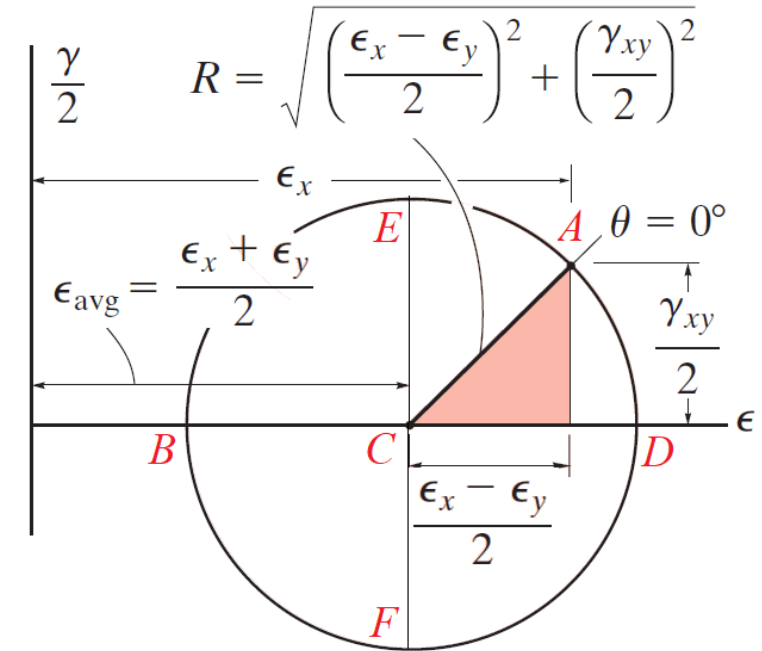
$$(\epsilon_{x'} - \epsilon_{\text{ort}})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R^2$$

Referans  $C(\epsilon_{\text{ort}}, 0)$  ve  $A(\epsilon_{x'}/2, \gamma_{xy}/2)$  noktalarını birleştiren çizginin uzunluğu yarıçapa eşit olacaktır. Merkez ve yarıçap belirli ise daire çizilebilir.  $A$  noktasının temsil ettiği düzlemin normali ile  $+x$  eksenindeki açı  $\theta=0^\circ$ 'dir.

Daire üzerinde asal birim uzamaları temsil  $B$  ve  $D$  noktaları ile maksimum kayma açısını temsil eden  $E$  noktası da belirlenmiş olur.

$AC$  ve  $CD$  doğru parçaları arasındaki açı, asal doğrultmanı verir ( $2\theta_{p1}$ ). Asal birim uzamaların doğrultusunun belirlenmesi için, eşdeğer düzlem eleman asal doğrultmanın yarısı kadar, ters yönde döndürülmelidir.

Mohr Dairesi'nde, maksimum kayma açısı ile asal birim uzamayı temsil eden noktalar arasındaki merkez açı  $90^\circ$ 'dir. Dolayısıyla, maksimum kayma açısı ile asal birim uzamaların doğrultuları arasındaki açı da  $45^\circ$ 'dir.



**Örnek 4-1:** Bir noktada düzlem birim şekil değiştirme bileşenleri  $\epsilon_x=500(10^{-6})$ ,  $\epsilon_y=-300(10^{-6})$  ve  $\gamma_{xy}=200(10^{-6})$  olarak bilinmektedir. Saat yönünde  $\theta=30^\circ$  döndürülmüş düzlem eleman üzerindeki eşdeğer şekil değiştirmeleri, dönüşüm bağıntılarını kullanarak hesaplayınız.

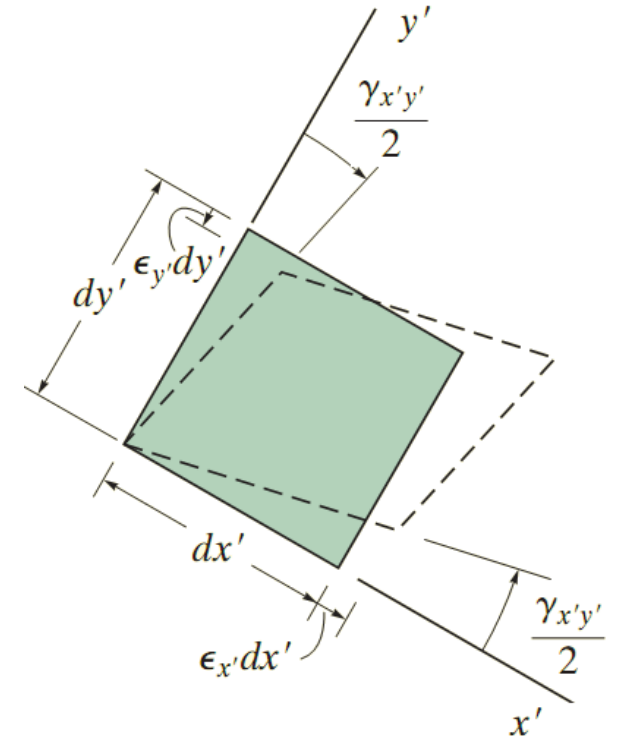
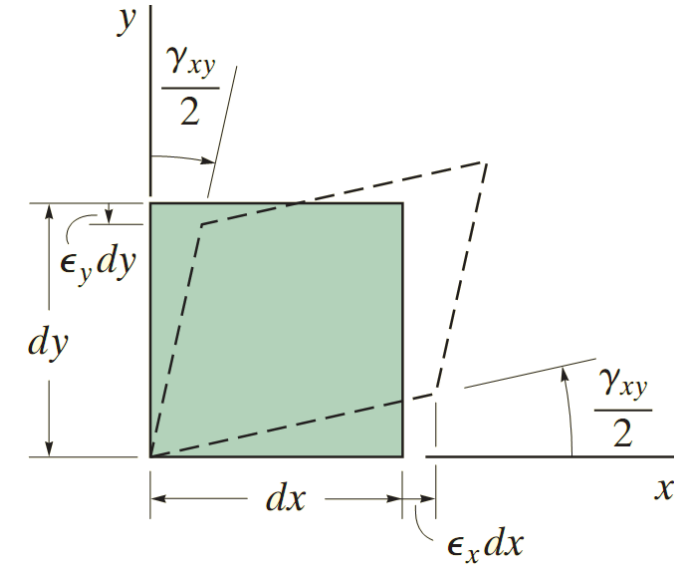
### Çözüm:

Çift açılar cinsinden dönüşüm bağıntıları ve eşdeğer şekil değiştirmeler:

$$\begin{aligned}\epsilon_{x'} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ &= \left[ \frac{500 + (-300)}{2} \right] (10^{-6}) + \left[ \frac{500 - (-300)}{2} \right] (10^{-6}) \cos(2(-30^\circ)) \\ &\quad + \left[ \frac{200(10^{-6})}{2} \right] \sin(2(-30^\circ)) \quad \epsilon_{x'} = 213(10^{-6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -\left( \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \\ &= -\left[ \frac{500 - (-300)}{2} \right] (10^{-6}) \sin(2(-30^\circ)) + \frac{200(10^{-6})}{2} \cos(2(-30^\circ)) \\ \gamma_{x'y'} &= 793(10^{-6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{y'} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ &= \left[ \frac{500 + (-300)}{2} \right] (10^{-6}) + \left[ \frac{500 - (-300)}{2} \right] (10^{-6}) \cos(2(60^\circ)) \\ &\quad + \frac{200(10^{-6})}{2} \sin(2(60^\circ)) \quad \epsilon_{y'} = -13.4(10^{-6})\end{aligned}$$



---

# **5- malzemelerin mekanik özellikleri**

## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

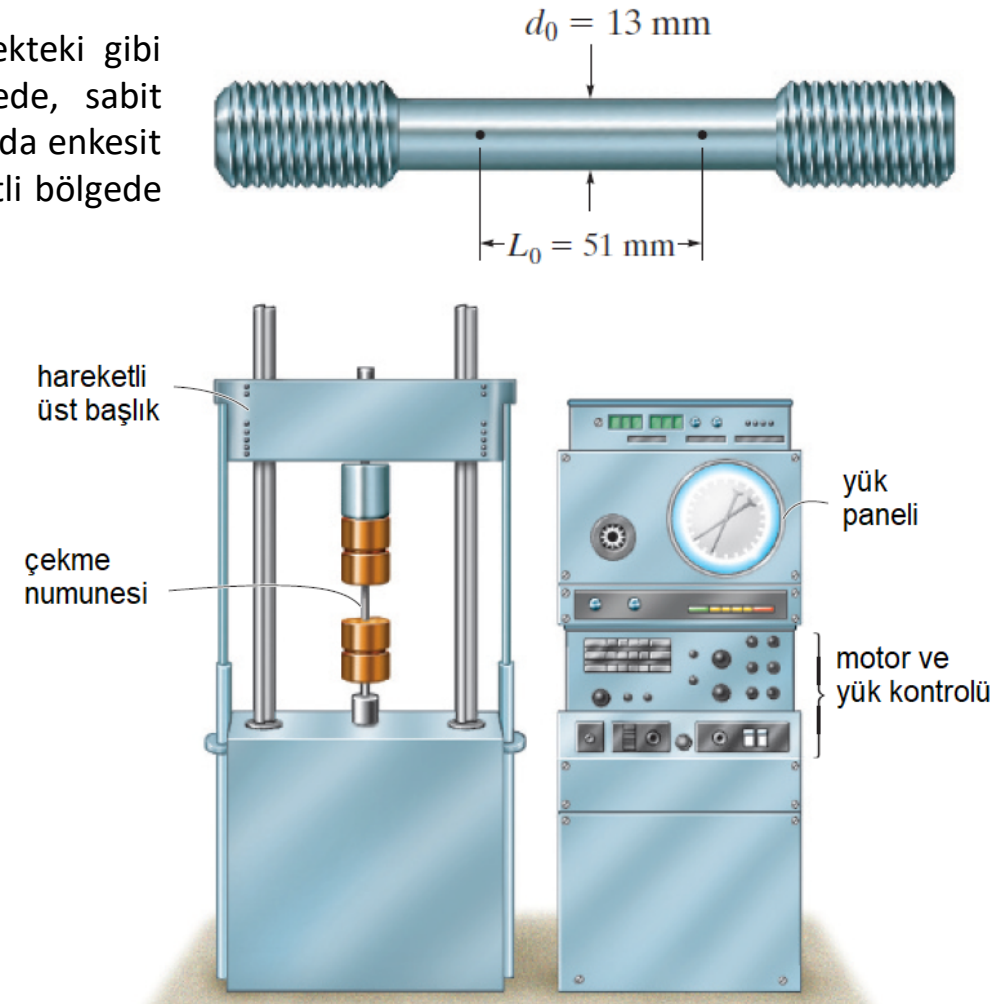
### 5.1. Çekme ve Basınç Testi

Bir cismin dayanımı, onun göçmeden veya deforme olmadan bir yükü taşıyabilme yeteneğine bağlıdır. Bu dayanım cismi oluşturan malzemeye bağlıdır ve deneylerle tespit edilmesi gerekir. Dayanım ile ilgili deneylerden en yaygın olarak kullanılanı çekme-basınç testidir. Bu test uygulanarak metal, seramik, beton vb. birçok mühendislik malzemesinde ortalama normal gerilme ile ortalama birim uzama arasındaki ilişki belirlenebilir.

Bir malzemenin çekme-basınç deneyleri için yanda görülen örnekteki gibi standart boyutlara sahip deney numuneleri kullanılır. Numunede, sabit dairesel kesite sahip bir bölge bulunmaktadır ve numunenin uçlarında enkesit alanı artmaktadır. Böylece deney esnasında göçme bu sabit enkesitli bölgede gerçekleşmektedir.

Deney öncesinde iki küçük işaretleyici sabit enkesitli bölgeyi tanımlamak üzere yerleştirilir. Deney esnasında, uygulanan yük ile beraber başlangıçta  $L_0$  olan iki işaretleyici arasındaki mesafe ve bu bölgede başlangıçta  $A_0$  olan kesit alanından ölçümler alınır. Deney makinasında, numunede göçme gözleninceye kadar yavaş yavaş ve sabit bir oranda artırılan çekme etkisinde gerekli ölçümler yapılabilmektedir.

Deney sonlanıncaya kadar, belirli bir aralıkla numuneye uygulanan kuvvet ve iki işaretleyici ile belirlenmiş boydaki değişim kaydedilir.



## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

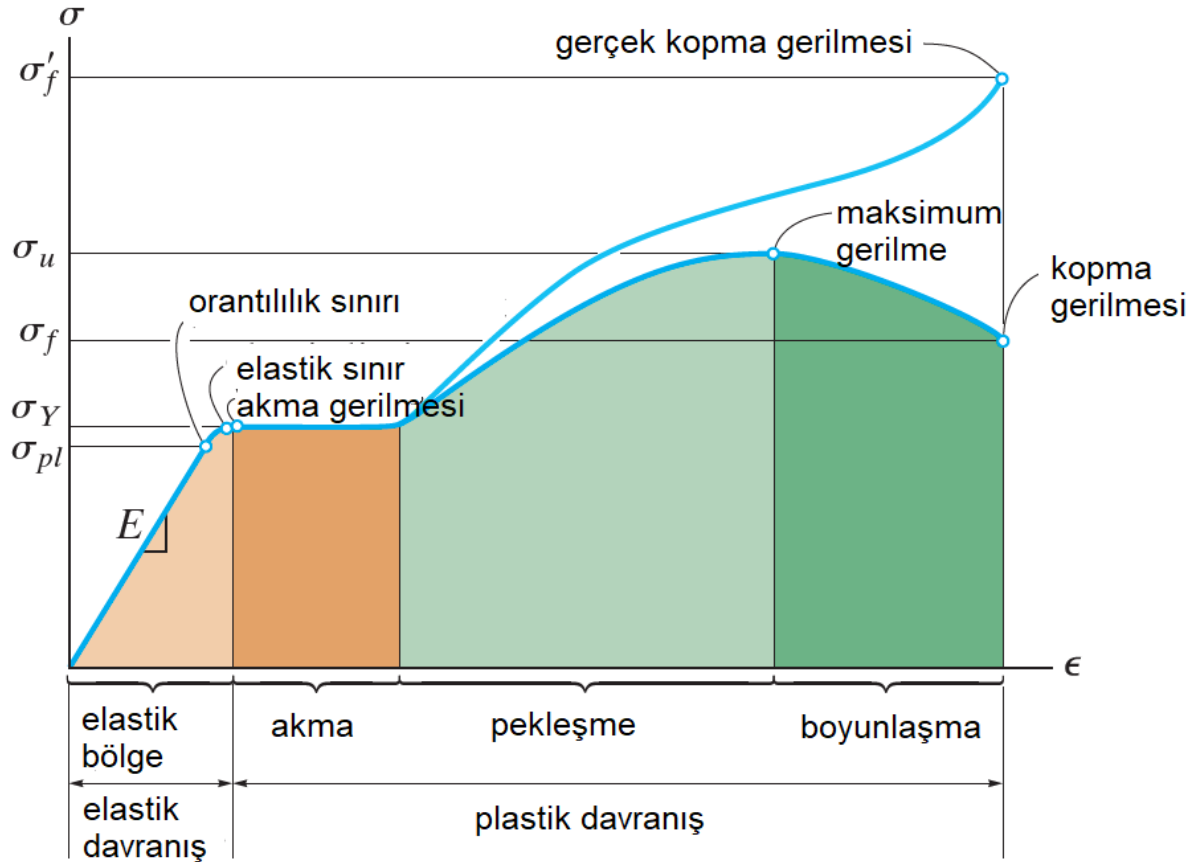
### 5.2. Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi

Deneyler sonucu bir numune için gerilme ve şekil değiştirme değerleri elde edildiğinde, sonuçlar gerilme-şekil değiştirme diyagramı olarak bilinen bir grafik şeklinde gösterilebilir.

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

Deneyin belirli bir adımında nominal normal gerilme ( $\sigma$ ), uygulanan yükün, başlangıç kesit alanına bölünmesi ile ifade edilir. Nominal birim uzama ( $\epsilon$ ) ise, yine deneyin belirli bir adımında, doğrudan ölçülen uzamanın, uzamanın ölçüldüğü kısmın başlangıçtaki boyuna bölünmesi ile elde edilir.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$$



Sünek malzeme (çelik) için tipik ve gerçek gerilme - şekil değiştirme diyagramı

Bu iki değer, gerilme-şekil değiştirme diyagramının çizilmesinde kullanılır. Diyagramda yatay ekseninde birim uzama, dikey ekseninde ise gerilme yer alır.

Tipik ve gerçek gerilme-şekil değiştirme diyagramları birbirine çok benzemekle beraber aynı değildir. Çünkü sonuçlar malzemenin yapısına deney numunesinin üretiliş biçimine, yükleme hızına, deney esnasındaki sıcaklığa vb. bağlıdır.

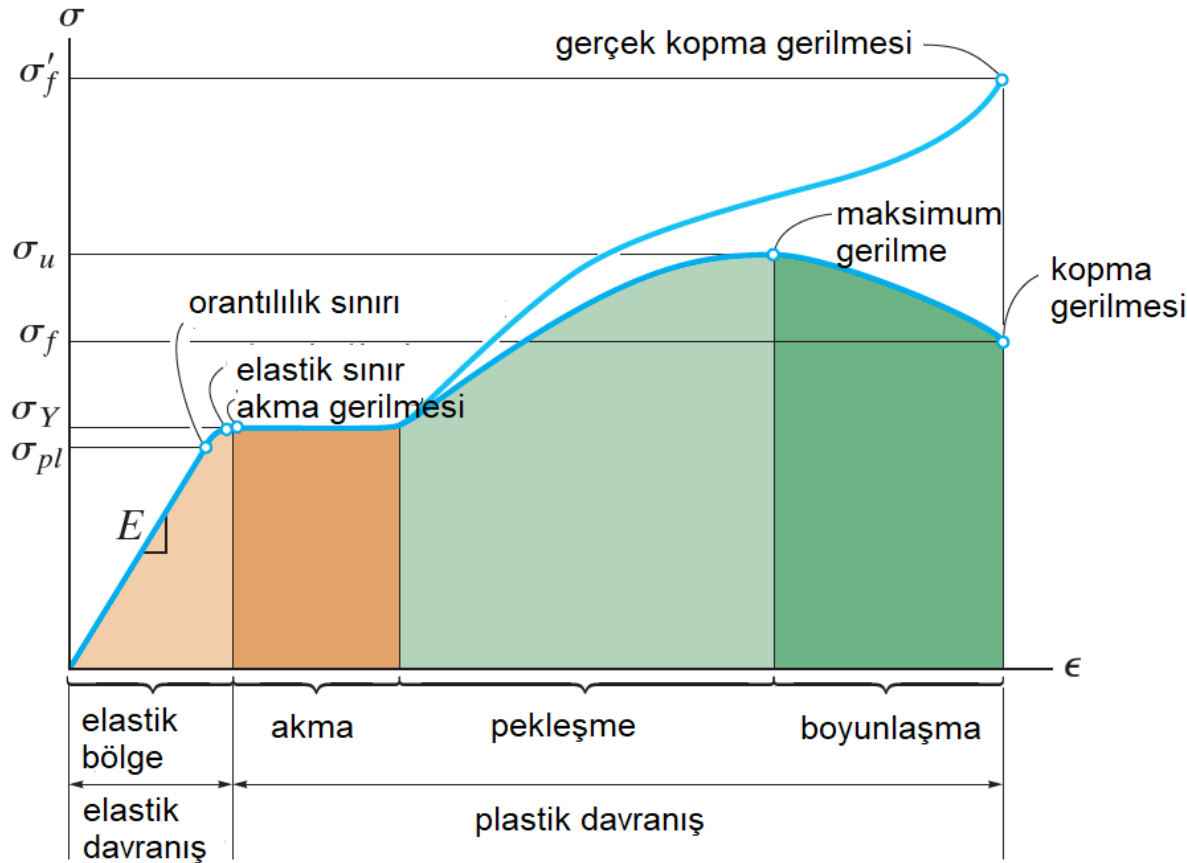
Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi, şekil değiştirme mertebesine bağlı olarak malzeme davranışı açısından dört farklı bölgeye ayrılabilir: elastik bölge, akma bölgesi, pekleşme bölgesi ve boyunlaşma bölgesi.

Elastik bölge için  $\sigma = E\epsilon$  kabulü yapılabilir.



## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.2. Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi



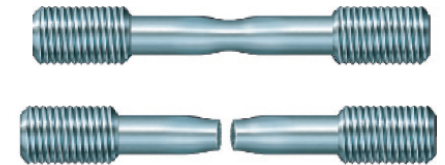
Sünek malzeme (çelik) için tipik ve gerçek gerilme - şekil değiştirme diyagramı

**Elastik bölge:** Bu bölgede, orantılılık sınırına kadar ilişki doğrusaldır. Doğrusal kısmın eğimi malzemenin elastisite modülü ( $E$ ) olarak bilinir. Deney esnasında, orantılılık sınırı aşıldığında, elastik bölge sınırına kadar ilişki bir eğri halini alır. Bir çok malzeme için orantılılık sınırı ile akma sınırı birbirine çok yakındır. Eğer yükleme esnasında akma sınırı aşılmaz ise, yük kaldırıldığında şekil değiştirmeler geri döner. Yani kalıcı şekil değiştirme oluşmaz.

**Akma bölgesi:** Elastik sınır aşıldığında, malzemede kalıcı (plastik) şekil değiştirme başlar. Plastik davranış, başlangıçta sabit gerilme altında oluşur. Sabit gerilme altında şekil değiştirmenin gözlemlendiği bölge akma bölgesidir.

**Pekleşme bölgesi:** Akma bölgesi bitiminden itibaren, şekil değiştirme yeniden artan gerilme altında gerçekleşir. Pekleşme denilen bu gerilmeye artma davranışı, deney esnasında maksimum gerilme noktasına ulaşıncaya kadar devam eder.

**Boyunlaşma bölgesi:** Maksimum gerilme noktasında ulaşıncaya kadar, şekil değiştirme esnasında çubuk boyunca üniform kabul edilebilecek bir biçimde kesit alanında azalma gerçekleşir. Ancak maksimum gerilme değeri aşıldığında, kesit alanında azalma yerel bir bölgede gerçekleşmeye başlar. Sonuç olarak, çubukta belirli bir bölgede boyunlaşma denen bir formda kesit azalması belirginleşir. Bu davranış, çubuğun bu yerel bölgede bir noktadan kopması gerçekleşinceye kadar devam eder.

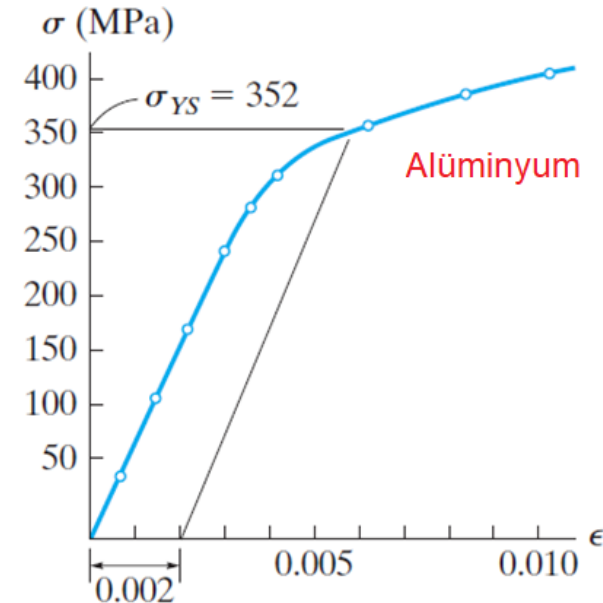
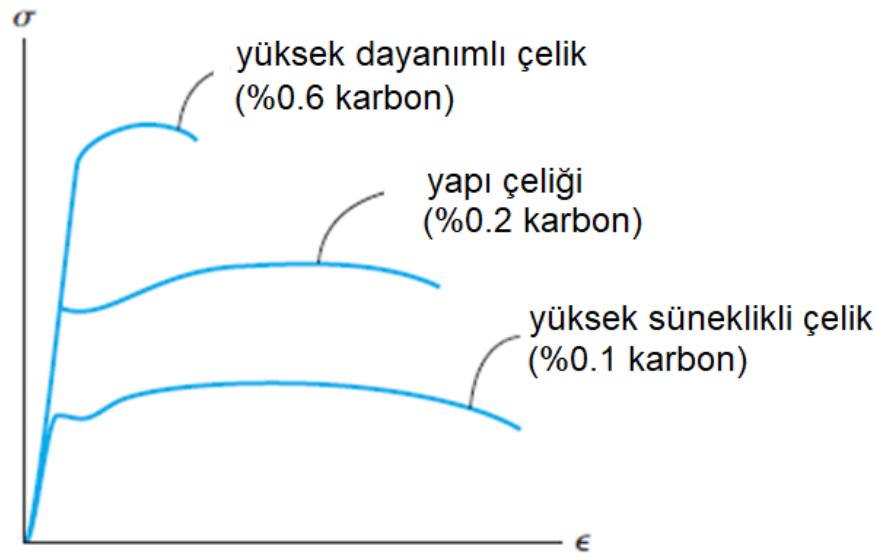


## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.2. Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi

Mühendislik alanında kullanılan malzemeler gerilme-şekil değiştirme ilişkisine bağlı olarak sünek malzeme ve gevrek malzeme olarak sınıflandırılabilirler. Göçmeden önce orantılılık ve akma sınırını da aşarak doğrusal olmayan büyük şekil değiştirmeler yapabilen malzemelere sünek malzeme denir. Mühendisler tasarımda genellikle sünek malzemeleri tercih ederler. Çünkü bu malzemelerin enerji sönümleme kapasitesi yüksektir. Yapı çeliği, sünek malzemeye bir örnektir. Beton ise gevrek malzeme için bir örnek olarak kabul edilebilir.

Sünek davranış gösteren bazı metal malzemelerde, çeliğin gerilme-şekil değiştirme davranışına benzer şekilde sırası ile doğrusal-elastik davranış, sabit gerilme altında akma, pekleşme ve göçmeye kadar boyunlaşma davranışı gözlenir. Ancak bazı malzemelerde ise (örneğin alüminyum), doğrusal elastik davranışın sonunda akma davranışı sabit bir gerilme altında gerçekleşmez. Bu durumda, akma noktası kolayca tanımlanamaz. Bu tür malzemeler kullanılarak yapılacak yapısal tasarım için pratikte 0.002 birim şekil değiştirmeye denk gelen noktadan başlangıçtaki doğrusal-elastik kısma paralel olarak çizgi çizilir. Çizginin gerilme-şekil değiştirme eğrisini kestiği noktadaki gerilme akma gerilmesi olarak kabul edilir.

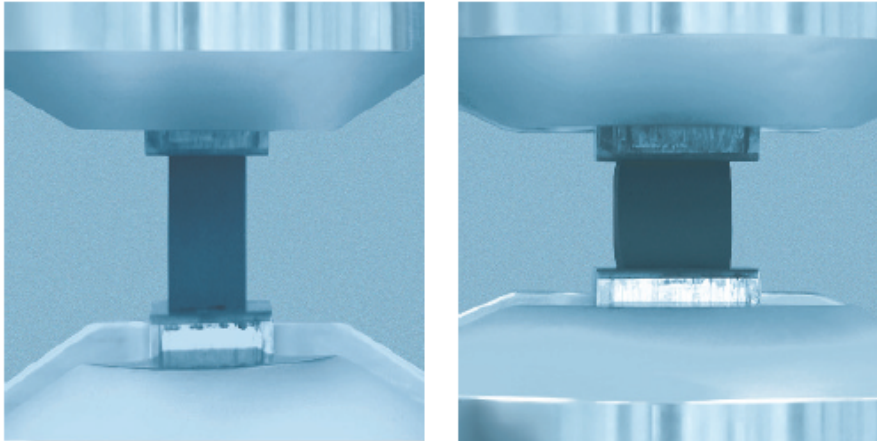


## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.3. Poisson Oranı

Şekil değiştirebilen bir cisim bir kuvvet etkisinde kaldığında, sadece kuvvet doğrultusunda yani boyuna doğrultuda değil, kuvvete dik yani enine doğrultuda da şekil değiştirme söz konusu olur. Örneğin, başlangıçta  $r$  yarıçapına ve  $L$  boyuna sahip bir cisim aşağıdaki gibi boyuna doğrultuda basınç kuvveti ile yüklenirse, cismin boyunda azalma ancak yarıçapında da artış olacaktır.

Homojen ve izotropik malzemeden oluşan bir cisim için, cismin kuvvete dik doğrultudaki şekil değiştirmesinin, kuvvet doğrultusundaki şekil değiştirmeye oranı Poisson Oranı olarak bilinmektedir. Her malzemenin kendine ait (0.0-0.5 aralığında) bir Poisson Oranı bulunmaktadır. Aşağıda verilen denklemdeki negatif işaret, birbirine oranlanan iki değerden birinde uzama gözlenirken diğesinde kısalma gözlenmesinden kaynaklanmaktadır.



$$\epsilon_{\text{boyuna}} = \frac{\delta}{L} \quad , \quad \epsilon_{\text{enine}} = \frac{\delta'}{r}$$

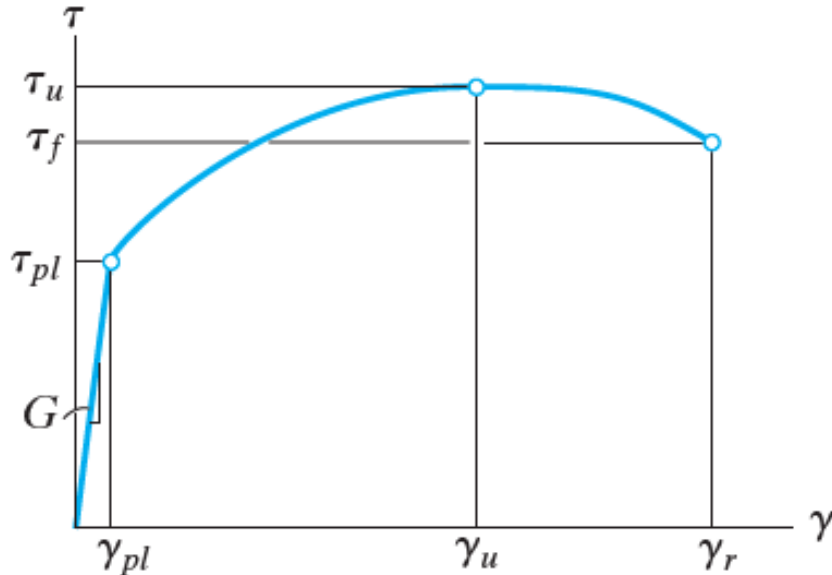
$$\nu = - \frac{\epsilon_{\text{enine}}}{\epsilon_{\text{boyuna}}}$$

## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.4. Basit Kayma Etkisinde Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi

Bilindiği gibi düzlem gerilme durumu için basit kayma durumunda, düzlem elemanın dört yüzeyinde kayma gerilmeleri oluşmaktadır. Eğer cisim homojen ve izotropik ise, basit kayma durumunda kayma açısı olarak bilinen düzgün şekil değiştirme meydana gelir.

Bir deney düzeneğinde bir cisme basit kayma etkisi verildiğinde ortaya çıkacak kayma gerilmesi – kayma açısı ilişkisi aşağıda görülmektedir. Çekme deneyinde olduğu gibi, bu deneyde de başlangıçta, gerilme ile şekil değiştirme arasında doğrusal ve elastik bir ilişki söz konusudur. Bu davranış orantılılık sınırına kadar gözlenir ( $\tau_{pl}$ ). Daha sonra, maksimum kayma gerilmesi değerine ( $\tau_u$ ) ulaşıncaya kadar pekleşme gözlenir. Bu noktadan itibaren cismin kayma dayanımında azalma gözlenir ve nihai şekil değiştirme değerine ulaşıldığında cisim kayma dayanımını kaybeder.

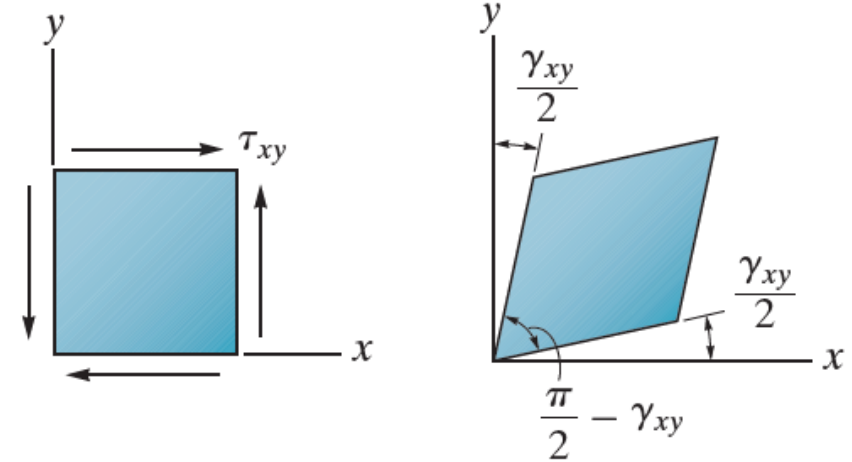


Çoğu mühendislik malzemesi için doğrusal elastik davranış bölgesinde kayma gerilmesi ile kayma açısı arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde tanımlanır.  $G$ , malzemenin kayma modülü olarak adlandırılır.

$$\tau = G\gamma$$

Elastisite modülü, poisson oranı ve kayma modülü arasında ise aşağıdaki gibi bir ilişki bulunmaktadır. Bu üç malzeme sabitinden ikisi bilindiğinde, diğeri bulunabilmektedir.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



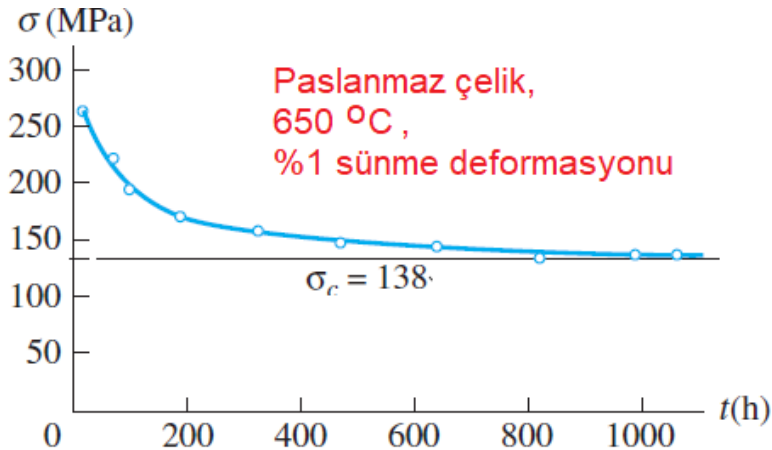
## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.5. Cisimlerin Zamana Bağlı Sünme ve Yorulma Davranışı

Dış ortam etkisindeki bazı cisimlerde, kullanım ömrü boyunca uzun süreli sıcaklık veya yük etkisi ya da zamana yayılı olarak periyodik yüklemeler söz konusu olabilir. Bu tür zamana bağlı etkilerin cisimlerin dayanımına etkisi de tasarım sürecinde ele alınmalıdır.

**Sünme:** Bir cisim, bir yükü uzun bir süre boyunca taşımak durumunda kaldığında, zamanla yük sabit kalsa da deformasyonlar ani bir göçme meydana gelinceye kadar devam edebilir. Sabit yük etkisindeki zamana bağlı bu deformasyona sünme denir. Sünme, yapısal eleman olarak kullanılan metal ve seramiklerde ortamın sıcaklık derecesine bağlıdır. Ancak ahşap, beton gibi bazı malzemelerde, uzun süreli yük etkisi ile sünme gözlenir.

Tasarımda sünmenin de önemli olduğu durumda, cisim dikkate alınan belirli bir zaman dilimi için ortaya çıkacak sünme şekil değiştirmesini karşılayabilecek şekilde tasarlanır. Sünme dayanımı, cisimde, belirli bir zaman dilimi boyunca sünme deformasyonunun belirli bir değeri aşmaması için izin verilebilecek maksimum gerilme değeridir. Sünme dayanımı sıcaklığa da bağlıdır. Yani tasarım için, sıcaklık, yükleme süresi, izin verilen sünme deformasyonu değerlerinin bilinmesi gerekir.



Belirli bir malzemenin sünme dayanımının belirlenmesi için bir çok yöntem mevcuttur. Bunlardan en kolay olanı, aynı malzemeden oluşmuş bir çok numunenin sabit sıcaklıkta ancak farklı eksenel yük etkisi altında eşzamanlı olarak deneye tabi tutulmasıdır. Önceden belirlenmiş sünme deformasyonuna ulaşıncaya kadar geçen süre ile normal gerilme ilişkisi bu şekilde elde edilebilir.

Bir malzemenin sünme dayanımı belirlendiğinde, izin verilen maksimum gerilmenin belirlenmesi için güvenlik faktörü kullanılabilir.

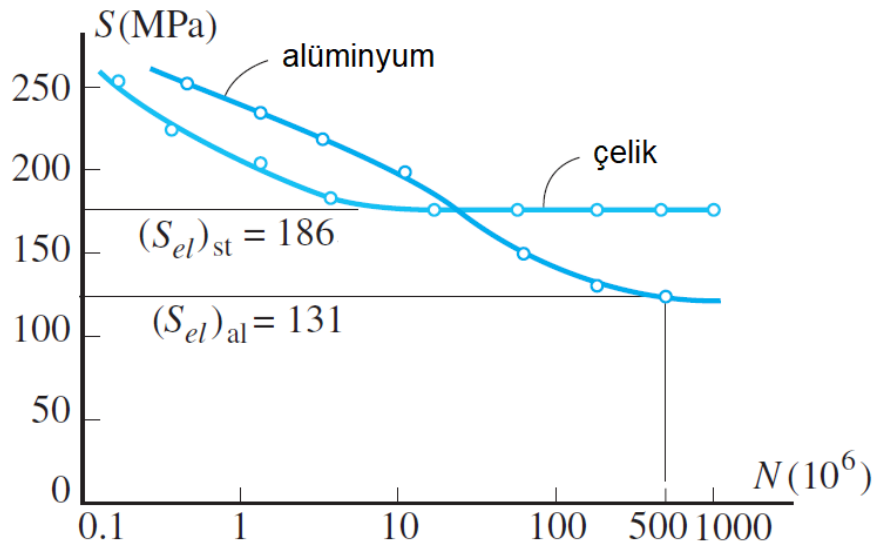


## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.5. Cisimlerin Zamana Bağlı Sünme ve Yorulma Davranışı

**Yorulma:** Bir cisim, belirli bir zaman boyunca tekrarlanan gerilme ve şekil değiştirme çevrimleri etkisinde kalırsa, bu durum cismin iç yapısında göçmeye sebep olacak düzeye ulaşınca kadar artacak yıpranmalara sebep olur. Bu davranışa yorulma denir. Bu davranış genellikle kafes sistemlerin ve köprülerin bağlantı elemanları ve mesnetleri, yüksek kule elemanları ve bağlantıları, demiryolu rayları gibi tekrarlanan yükler etkisindeki elemanlarda veya sistem parçalarında gözlenir. Yorulma sebebi ile göçme, cismin akma dayanımının altında bir gerilme değerinde meydana gelir.

Başlangıçta genellikle cismin yüzeyinde, kesit ortalama gerilmesinin üzerinde gerilmeye maruz yerel bir bölgede mikroskobik hasarlar ortaya çıkar. Yüksek gerilme tekrarlandığında hasarlar çatlaklara dönüşür. Bu defa çatlakların uçlarında gerilme daha da artar. Gerilme çevrimi devam ettikçe de, çatlaklar ilerler. Sürecin tekrarlanarak devam etmesi sonucunda da eleman kesitinde zayıflama oluşur. Belirli bir tekrar sonrasında da ani göçme meydana gelir. Yani, sünek olduğu bilinen malzemede bile gevrek davranış ortaya çıkar.

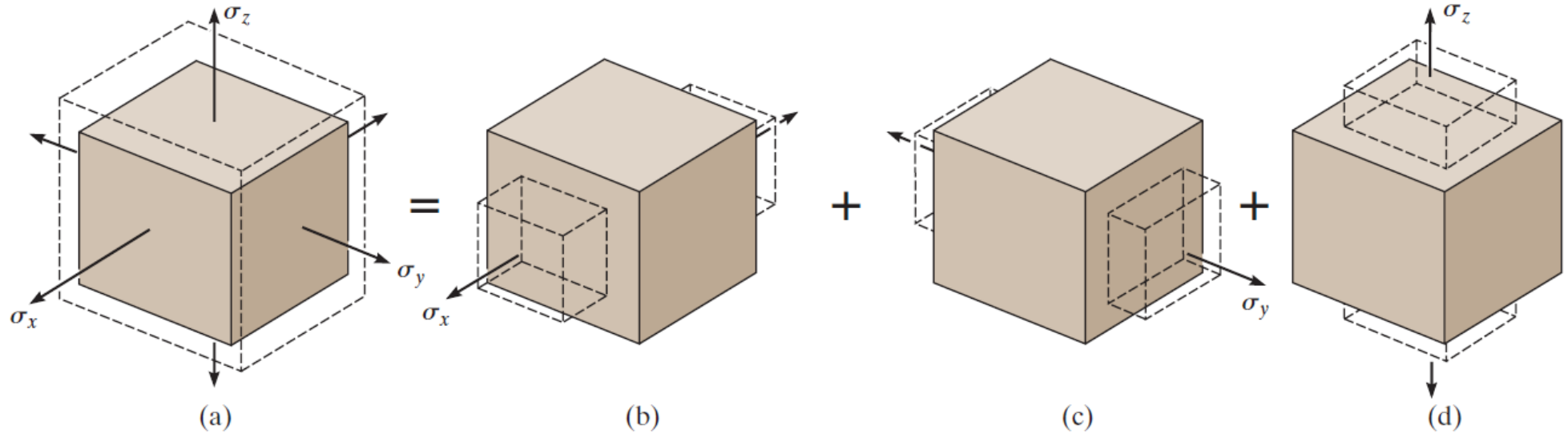


Tekrarlanan yükler altındaki bir malzemeye ait güvenilir dayanımı belirlemek için, belirli bir sayıda çevrim ile bir yük uygulansa da, herhangi bir hasarın ortaya çıkmayacağı bir sınır tespit edilmelidir. Bu sınır gerilme değerine yorulma sınırı denir. Bu amaçla bir deney makinası kullanılarak, deney numunelerine belirlenen bir gerilme, yorulma sebebi ile göçme gözlenecek sayıda tekrar ile uygulanır. Sonuç uygulanan gerilme ve göçmeye sebep olan tekrar sayısı ( $S-N$ ) ilişkisi biçiminde grafik olarak çizilir. Tekrar sayısı çok fazla olduğundan genelde logaritmik ölçekte gösterilir. Yorulma dayanımı belirlendiğinde, bu gerilmenin altındaki gerilme değerleri için yorulma ömrünün sınırsız olacağı varsayılır.

## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.6. Malzemede Bünye Bağlılıları

Bazı durumlarda, malzemeler birden fazla doğrultuda gerilme ve şekil değıştirme etkisinde kalırlar. Bu durumu incelemek için malzemenin homojen ve izotropik olduğu, doğrusal elastik davranış göstereceği kabul edilecektir.



Genelleştirilmiş Hooke Yasası: Bir malzeme bir noktada üç eksenli gerilme etkisi ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ) altında kaldığında, süperpozisyon prensibi kullanılarak bu gerilmeler şekil değıştirmeler ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ) ile ilişkilendirilebilir.

Örneğin üç eksenlerdeki gerilmelerin her birinin  $\epsilon_x$  üzerindeki etkisi aşğıdaki denklemler ile hesaplanabilir.

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \epsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

Yukarıda ayrı ayrı hesaplanan şekil değıştirmeler toplanarak üç gerilmenin ortak etkisi altında toplam şekil değıştirme yanda verildiği gibi elde edilir.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

### 5.6. Malzemede Bünye Bağlılıları

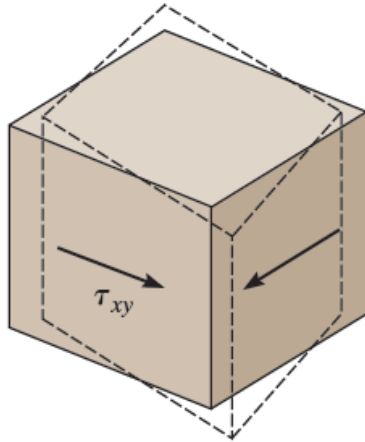
$\epsilon_x$  için elde edilen ifadeler benzer şekilde  $\epsilon_y$  ve  $\epsilon_z$  için de elde edilebilir. Yanda üç eksen doğrultusundaki şekil değıştirme değeri beraber verilmiştir. Bu denklemler üç eksenli bir gerilme durumu için Genelleştirilmiş Hooke Yasası olarak bilinir. Pratik uygulamalar için çekme gerilmesi ve uzama pozitif, basınç gerilmesi ve kılalma negatif işaretli olarak gösterilir.

Eğer cisme sadece  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi uygulanır ise, cismin sadece şekli değışecek ve hacmi değışmeyecektir. Yani  $\tau_{xy}$  gerilmesi, cisimde sadece  $\gamma_{xy}$  kayma açısına sebep olacaktır. Benzer şekilde  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  kayma gerilmeleri de cisimde sırası ile sadece  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$  kayma açılarına sebep olur. Dolayısıyla, kayma gerilmeleri ile kayma şekil değıştirmeleri için Hooke Yasası denklemleri aşağıdaki şekildedir.

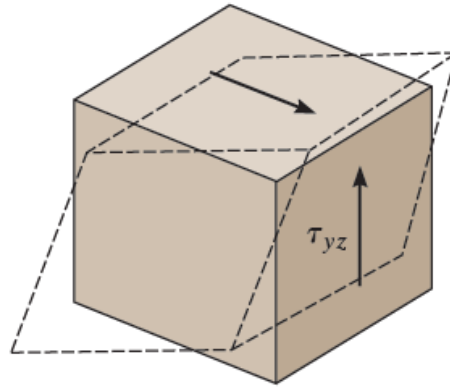
$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

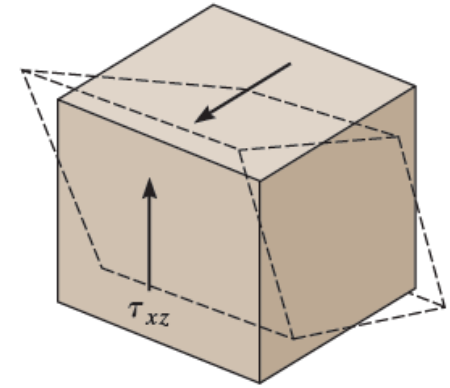
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



(a)



(b)



(c)

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$



## 5- Malzemelerin Mekanik Özellikleri

---

### 5.7. Isı Etkisi İle Şekil Değiştirme

Sıcaklığın değişmesi cismin şekil değiştirmesine sebep olur. Sıcaklık düştüğünde cisim büzülürken, sıcaklık yükseldiğinde cisim genişleyecektir. Büzülme ve genişleme, sadece üç asal eksen doğrultusunda uzama veya kısalma şekil değiştirmeleri ile oluşur. Şekil değiştirmeler sıcaklık değişimi ile orantılı olarak ortaya çıkar. Isı etkisi ile kayma şekil değiştirmeleri oluşmaz.

Cismin sıcaklık değişimi ile şekil değiştirmesinin engellenmediği durumlarda, cisimde herhangi bir gerilme ortaya çıkmaz.

Homojen ve izotropik malzemelerde sıcaklık sebebi ile birim boy değişimi ( $\varepsilon_T$ ) her doğrultuda eşit olur ve aşağıdaki denklem ile hesaplanır. Denklemde  $\alpha$  malzemenin termal genişleme katsayısı,  $\Delta T$  ise sıcaklık değişimidir.

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T)$$

Isı etkisini de içeren Hooke Yasası denklemleri aşağıda verilmiştir. Bu denklemler kullanılarak gerilmeler ve sıcaklık değişimi bilindiğinde birim uzama değerleri hesaplanabilir. Bu denklemlerin ters dönüşümleri alınarak, birim uzama değerleri bilindiğinde cisimde ortaya çıkacak gerilmeler de hesaplanabilir.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha(\Delta T)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha(\Delta T)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] + \alpha(\Delta T)$$

**Örnek 5-1:** Yanda gerilme-şekil değiştirme ilişkisi verilen bir malzemeden yapılan kutu kesitli çubuktaki uzamayı  $P=100$  kN için hesaplayınız (Kutu kesit profil kalınlığı 5 mm).

**Çözüm:**

$P=100$  kN için çubukta normal gerilme:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100000 \text{ N}}{900 \text{ mm}^2} = 111.11 \text{ MPa}$$

Gerilme, akma gerilmesinin (250 MPa) altındadır. Yani, Hooke Yasası geçerlidir ve uzama elastik olacaktır. Akma noktasına kadar olan ilk kısmın eğimi, elastisite modülünü verecektir:

$$E = \frac{250}{0.00125} = 200000 \text{ MPa}$$

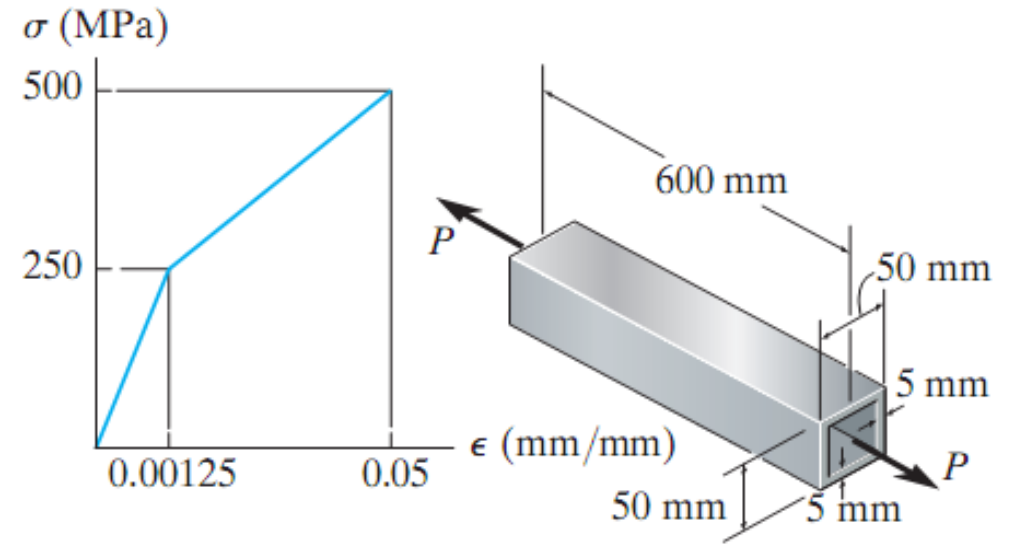
Çubuktaki gerilmeye karşılık gelen birim uzama:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{111.11}{200000} = 5.56 \cdot 10^{-4}$$

Çubukta toplam uzama ve çubuğun yeni boyu:

$$\delta = \varepsilon L = 5.56(10^{-4})(600) = 0.334 \text{ mm}$$

$$L' = L + \delta = 600 + 0.334 = 600.334 \text{ mm}$$



**Örnek 5-2:** Şekildeki dairesel enkesitli elastik çubuk  $d=15$  mm çapa ve  $L=200$  mm uzunluğa sahiptir. Çubuk  $P=300$  N çekme kuvveti etkisinde kalırsa, çubuğun boyundaki ve çapındaki değişim ne olur? Elastisite modülünü  $E=2700$  MPa ve poisson oranını  $\nu=0.40$  alınız.

**Çözüm:**

$P=300$  kN için normal gerilme ve boyuna birim uzama:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{300}{\pi(15^2)/4} = 1.697 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{boy} = \frac{\sigma}{E} = \frac{1.697}{2700} = 6.285(10^{-4})$$

Çubuk boyundaki değişim (artış) ve çubuğun yeni boyu:

$$\Delta_L = \varepsilon_{boy} L = 6.285(10^{-4})(200) = 0.126 \text{ mm}$$

$$L' = L + \Delta_L = 200.126 \text{ mm}$$

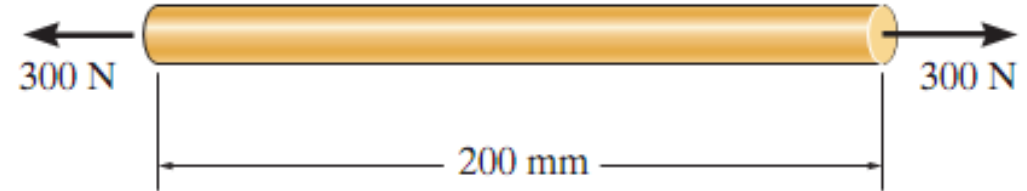
Enine birim şekil değiştirme:

$$\varepsilon_{eni} = -\nu \varepsilon_{boy} = -0.4(6.285)(10^{-4}) = -2.514(10^{-4})$$

Çubuk çapındaki değişim (azalma) ve çubuğun yeni çapı:

$$\Delta_d = \varepsilon_{eni} d = -2.514(10^{-4})(15) = -0.0038 \text{ mm}$$

$$d' = d + \Delta_d = 15 + (-0.0038) = 14.9962 \text{ mm}$$

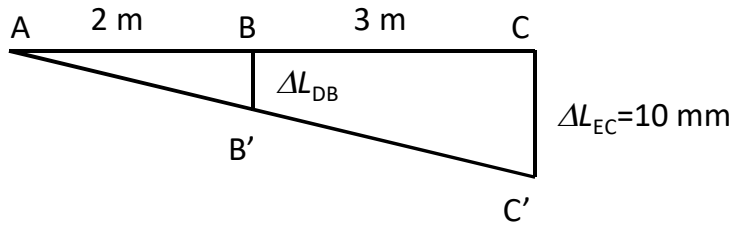


**Örnek 5-7:** Yanda görülen rijit kiriş, A sabit mesneti ile  $d=10$  mm çaplı DB ve EC kabloları tarafından taşınmaktadır. Yayılı  $w$  yükü etkisinde C noktası 10 mm düşey ötelenme yapmıştır. Kablolar için  $E=20000$  MPa,  $\nu=0.25$  ise,

- EC ve DB kablolarında birim uzamayı hesaplayınız.
- EC ve DB kablolarının çaplarında azalmayı bulunuz.
- EC ve DB kablolarında eksenel kuvvetleri bulunuz.

**Çözüm:**

Şekil değiştirmiş sistemde uygunluk denklemi yazılırsa :



$$\frac{\Delta L_{DB}}{\Delta L_{EC}} = \frac{2}{5} \rightarrow \Delta L_{DB} = 4 \text{ mm}$$

Kablolarda birim uzama miktarları :

$$\varepsilon_{EC} = \frac{\Delta L_{EC}}{L_{EC}} = \frac{10}{2000} = 0.0050 \quad \varepsilon_{DB} = \frac{\Delta L_{DB}}{L_{DB}} = \frac{4}{1500} = 0.0027$$

Kabloların çaplarında azalma miktarı :

$$\Delta d_{EC} = (-\nu \varepsilon_{EC}) d_{EC} = (-0.25 * 0.005) * 10 = -0.0125 \text{ mm} \quad \Delta d_{DB} = (-\nu \varepsilon_{DB}) d_{DB} = (-0.25 * 0.0027) * 10 = -0.0068 \text{ mm}$$

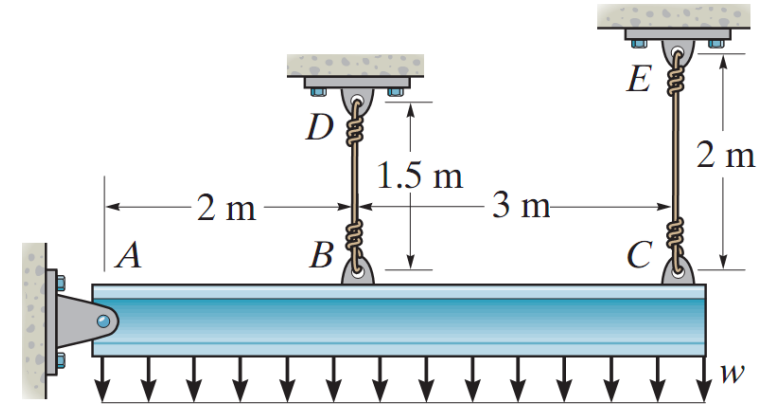
Kablolarda eksenel gerilme ve eksenel kuvvetler:

$$\sigma_{EC} = \varepsilon_{EC} E = 0.0050 * 20000 = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{DB} = \varepsilon_{DB} E = 0.0027 * 20000 = 54 \text{ MPa}$$

$$N_{EC} = \sigma_{EC} A_{EC} = 100 * (\pi * 5^2) = 7757 \text{ N}$$

$$N_{DB} = \sigma_{DB} A_{DB} = 54 * (\pi * 5^2) = 3929 \text{ N}$$



**Örnek 5-10:** Şekilde verilen gerilme durumunu elemanı dikkate alarak, asal uzama oranlarını bulunuz.  $E=29\ 000\text{ MPa}$  ve  $\nu=0.32$  alınız.

**Çözüm:**

Genelleştirilmiş Hooke Yasası denklemleri kullanılırsa:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3) = \frac{1}{29000}[12 - 0.32 * (8 + (-20))] = 5.46(10^{-4})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3) = \frac{1}{29000}[8 - 0.32 * (12 + (-20))] = 3.64(10^{-4})$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{29000}[-20 - 0.32 * (12 + 8)] = -9.10(10^{-4})$$

