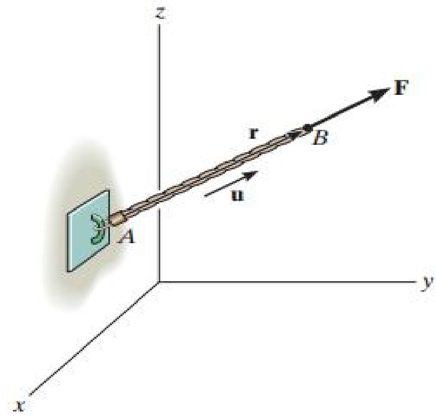
BİR DOĞRU BOYUNCA YÖNELEN KUVVET VEKTÖRÜ

Üç boyutlu statik problemlerinde, bir kuvvetin doğrultusu, çoğu zaman, etki çizgisinin geçtiği iki nokta ile belirlenir. Şekilde gösterildiği gibi, *AB* kablosu boyunca yönelen **F** kuvveti buna bir örnektir. **F**'yi, kablo üzerinde *A* noktasından *B* noktasına yönelen **r** konum vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olduğunu göz önüne alarak, bir kartezyen vektör şeklinde formüle edebiliriz. Bu ortak doğrultu, u = **r**/*r* birim vektörü ile belirlenir. Buradan,



$$\boldsymbol{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = F\left(\frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)$$

Analizlerde incelenecek yol;

F, *A* noktasından *B* noktasına uzanan bir doğru boyunca etkiyorsa, aşağıdaki şekilde kartezyen vektör formunda ifade edilebilir.

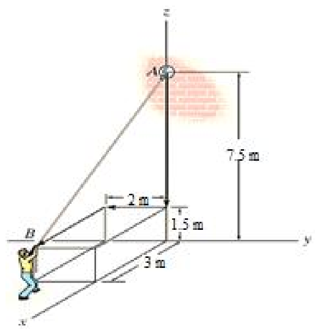
Konum vektörü: *A*'dan *B*'ye yönelen konum **r** vektörü belirlenir ve *r* büyüklüğü hesaplanır.

Birim vektör: Hem **r** hem de **F**'nin doğrultusu ve yönünü tanımlayan u = **r** / *r* birim vektörü belirlenir.

Kuvvet vektörü: *F* büyüklüğü ve **u** doğrultusu birleştirilerek, yani **F** = *F***u** yazılarak, **F** belirlenir.

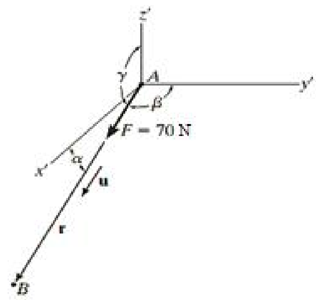
ÖRNEK:

Şekilde gösterilen adam, ipi 70 N 'luk bir kuvvetle çekmektedir. A mesnedine etkiyen bu kuvveti kartezyen vektör şeklinde ifade ediniz ve doğrultusunu belirleyiniz.



ÇÖZÜM:

F kuvveti, şekilde gösterilmektedir. Bu vektörün doğrultusu, yani **u**, *A*'dan *B*'ye uzanan **r** konum vektöründen belirlenir, **F**'yi kartezyen vektör şeklinde ifade etmek için aşağıdaki yöntem kullanılır.



Konum vektörü: İpin uç noktalarının koordinatları $A(0, 0, 7.5\text{ m})$ ve $B(3\text{m}, -2\text{ m}, 1.5\text{ m})$ dir. A'nın x, y ve z koordinatlarını B'ninkilerden çıkartarak konum vektörü oluşturulursa;

$$\mathbf{r} = (3m - 0)i + (-2m - 0)j + (1.5m - 7.5m)k = (3i - 2j - 6k)m$$

AB ipinin uzunluğunu gösteren, **r**'nin büyüklüğü;

$$\mathbf{r} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7m$$

Birim vektör: **r** ve **F**'nin doğrultusunu ve yönünü tanımlayan birim vektör;

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{3i - 2j - 6k}{7}$$

Kuvvet vektörü: **F**'nin büyüklüğü 70 N ve doğrultusu **u** ile tanımlandığına göre;

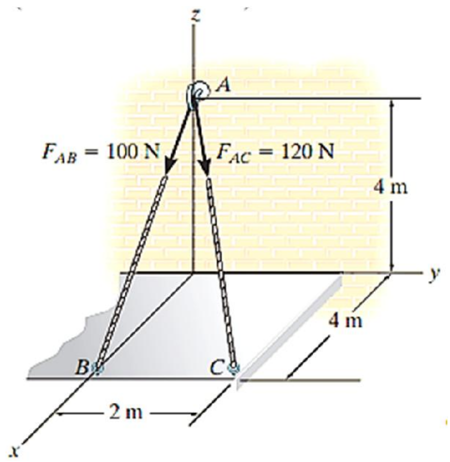
$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = 70N\left(\frac{3i - 2j - 6k}{7}\right) = (30i - 20j - 60k)N$$

Şekil' de gösterildiği gibi, koordinat doğrultu açıları, **r** (veya **F**) ile orijini A 'da olan yerel koordinat sisteminin pozitif eksenleri arasında ölçülür. Birim vektörün bileşenlerinden,

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 64.6^0, \beta = cos^{-1}\left(\frac{-2}{7}\right) = 107^0, \gamma = cos^{-1}\left(\frac{-6}{7}\right) = 149^0$$

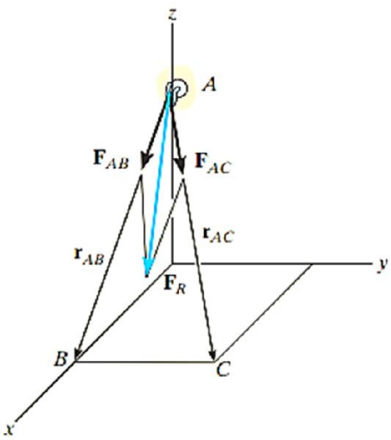
ÖRNEK:

Kablolar, şekilde gösterildiği gibi, A'daki halkaya $F_{AB} = 100$ N ve $F_{AC} = 120$ N kuvvetleri uygulamaktadır. A'da etkiyen bileşke kuvvetin büyüklüğünü hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

$\mathbf{F}_R$ bileşke kuvveti, şekilde gösterilmiştir. Bu kuvveti, önce $\mathbf{F}_{AB}$ ve $\mathbf{F}_{AC}$'yi kartezyen vektörler şeklinde formüle ettikten sonra bunların bileşenlerini toplamak suretiyle, kartezyen vektör şeklinde ifade edebiliriz. $\mathbf{F}_{AB}$ ve $\mathbf{F}_{AC}$' nin doğrultuları, kablolar boyunca $\mathbf{u}_{AB}$ ve $\mathbf{u}_{AC}$ birim vektörleri oluşturularak belirlenir. Bu birim vektörler ilgili $\mathbf{r}_{AB}$ ve $\mathbf{r}_{AC}$ konum vektörlerinden elde edilir.



$\mathbf{F}_{AB}$ için,

$$\mathbf{r}_{AB} = (4m - 0)i + (0 - 0)j + (0 - 4m)k = (4i - 4k)m$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5.66m$$

$$\mathbf{F}_{AB} = 100N\left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = 100N\left(\frac{4}{5.66}i - \frac{4}{5.66}k\right) = (70.7i - 70.7k)N$$

$\mathbf{F}_{AC}$ için,

$$\mathbf{r}_{AC} = (4m - 0)i + (2 - 0)j + (0 - 4m)k = (4i + 2j - 4k)m$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6m$$

$$\mathbf{F}_{AB} = 120N\left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = 120N\left(\frac{4}{6}i + \frac{2}{6}j - \frac{4}{6}k\right) = (80i + 40j - 80k)N$$

Bileşke kuvvet;

$$= F_{AB} + F_{AC} = (70.7i - 70.7k)N + (80i + 40j - 80k)N = (150.7i + 40j - 150.7j)N$$

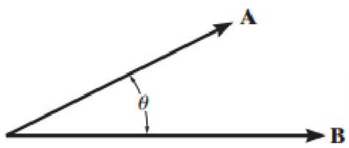
Bileşke kuvvetin büyüklüğü;

$$F_R = \sqrt{(150.7)^2 + (40)^2 + (150.7)^2} = 217N$$

İKİ VEKTÖRÜN SKALER ÇARPIM

Statikte, zaman zaman iki doğru arasındaki açının veya bir kuvvetin bir doğruya paralel ve dik bileşenlerinin bulunması gerekir. İki boyutluda bu problemler trigonometri ile kolayca çözülebilir, çünkü geometriyi gözde canlandırmak zor değildir. Ancak, üç boyutlu uzayda bu çoğu zaman zordur ve bu nedenle çözüm için vektör yöntemleri uygulanmalıdır. Skaler çarpım, iki vektörün "çarpımı" için özel bir yöntemdir ve yukarıda belirtilen problemleri çözmek için kullanılır.

A ve **B** vektörlerinin skaler çarpımı, **A . B** şeklinde yazılır ve "**A** skaler çarpım **B**" diye okunur ve **A** ve **B**'nin büyüklükleri ile iki vektör arasındaki θ açısının kosinüsünün çarpımı olarak tanımlanır. Bu tanım denklem formunda, 0°< 0 < 180° olmak üzere, şu şeklinde yazılır.



$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta}$$

Bu çarpım adını sonucun bir skaler (vektör değil) olmasından alır. Skaler çarpıma nokta çarpım da denir.

İşlem Kuralları:

1. Değişme özelliği: $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$

2. Skaler ile çarpım: $\alpha(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}).\mathbf{B} = \mathbf{A}\,.\,\alpha(\mathbf{B})$

3. Dağılma kuralı: $\mathbf{A}\,.\,(\mathbf{B}+\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\,.\,\mathbf{D})$

Önceki denklem kartezyen birim vektörlerin skaler çarpımım bulmak için kullanılabilir. Örneğin, **i.i** = (1)(1)cos0^0 = 1 ve **i.j** = (1)(1) cos90° = 0 olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned}$$

Skaler çarpım işlemlerini yaptığımızda sonuç;

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Buna göre, iki kartezyen vektörün skaler çarpımım belirlemek için, karşı gelen x, y, z bileşenleri çarpılır ve çarpımlar cebirsel olarak toplanır. Sonuç bir skaler olduğundan, sonuçta herhangi bir birim vektör bulunmamasına dikkat etmek gerekir.

Uygulamalar: Skaler çarpımın mekanikte iki önemli uygulama alam vardır.

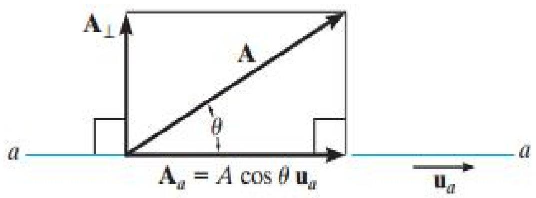
1. *İki vektör veya kesişen doğrular arasındaki açı.* **A** ve **B** vektörleri arasındaki θ açısı şu şekilde belirlenir.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \qquad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

2. *Bir vektörün bir doğruya paralel ve dik bileşenleri.* Şekildeki **A** vektörünün *aa*' doğrusuna paralel veya bu doğru üzerindeki bileşeni A_a ($A_a = A\cos\theta$) ile tanımlanır. Bu bileşene **A**'nın doğru üzerindeki izdüşümü de denir, çünkü oluşturulurken dik açı meydana gelir. Doğrunun doğrultusu $\mathbf{u_a}$ birim vektörü ile belirlenirse, $u_a = 1$ olduğundan, A_a'nın büyüklüğü doğrudan skaler çarpımdan belirlenebilir.

$A_a = A\cos\theta = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{u_a}$

Buna göre, **A**'nın bir doğru üzerindeki skaler izdüşümü, **A** ile doğrunun doğrultusunu tanımlayan $\mathbf{u_a}$ birim vektörünün skaler çarpımından belirlenir. Bu sonuç pozitif ise, $\mathbf{A_a}$ in yönü $\mathbf{u_a}$ ile aynıdır, buna karşın, A_a negatif bir skaler ise $\mathbf{A_a}$, $\mathbf{u_a}$'nun tersi yönlüdür.



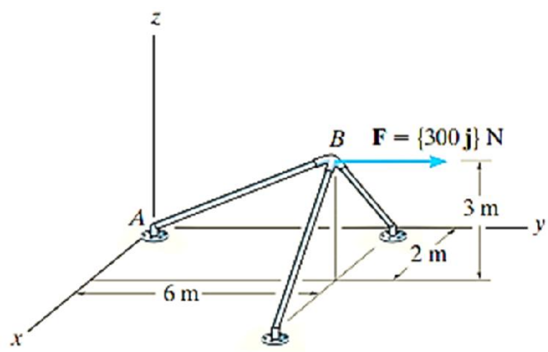
Vektör olarak gösterilen $\mathbf{A_a}$ bileşeni $\mathbf{A_a} = A_a\mathbf{u_a}$ şeklinde belirtilir.

A’nın *aa’* doğrusuna dik bileşeni de elde edilebilir. Şekilde görüldüğü gibi $\mathbf{A} = \mathbf{A_a} + \mathbf{A_{dik}}$ olduğundan, $\mathbf{A_{dik}} = \mathbf{A} - \mathbf{A_a}$ olur. Adik iki yolla elde edilebilmektedir. Birincisi, θ’ yı skaler çarpımdan $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u_a}/A)$ şeklinde elde edip, $A_{dik} = A\sin\theta$’yı hesaplamaktır. İkinci yol, Aa biliniyorsa Pisagor teoreminden faydalanarak hesaplanabilmektedir,

$$A_{dik} = \sqrt{(A)^2 - (A_a)^2}$$

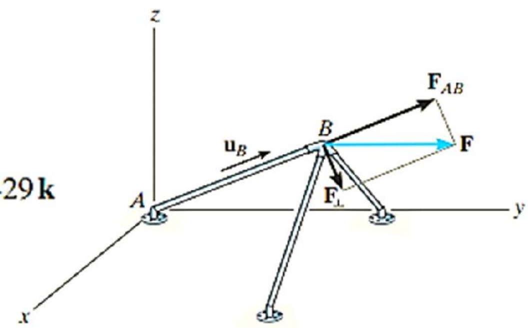
ÖRNEK:

Şekilde gösterilen çerçeveye F = {300 j} N yatay kuvveti etkimektedir. Bu kuvveti, *AB* elemanına paralel ve dik bileşenlerini belirleyiniz.



ÇÖZÜM:

F'nin *AB* doğrultusundaki bileşeninin büyüklüğü, **F** ile *AB*’ nin doğrultusunu tanımlayan $\mathbf{u_B}$ birim vektörünün skaler çarpımına eşittir.



$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} F_{AB} &= F\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_B = (300\mathbf{j})\cdot(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= (0)(0.286) + (300)(0.857) + (0)(0.429) \\ &= 257.1 \text{ N} \end{aligned}$$

Sonuç pozitif bir skaler olduğundan, $\mathbf{F_{AB}}$'nin yönü $\mathbf{u_B}$ ile aynıdır.

$\mathbf{F_{AB}}$’ yi kartezyen vektör şeklinde ifade edersek;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= F_{AB}\mathbf{u}_B = (257.1 \text{ N})(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= \{73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\}\text{N} \end{aligned}$$

Böylece, dik bileşen;

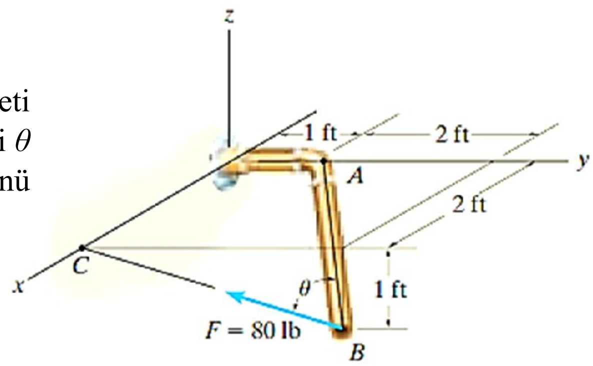
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\perp &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}) \\ &= \{-73.5\mathbf{i} + 79.6\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\}\text{N} \end{aligned}$$

Büyüklüğü, bu vektörden veya Pisagor teoreminden belirlenebilir;

$$\begin{aligned} F_\perp &= \sqrt{F^2 - F_{AB}^2} = \sqrt{(300 \text{ N})^2 - (257.1 \text{ N})^2} \\ &= 155 \text{ N} \end{aligned}$$

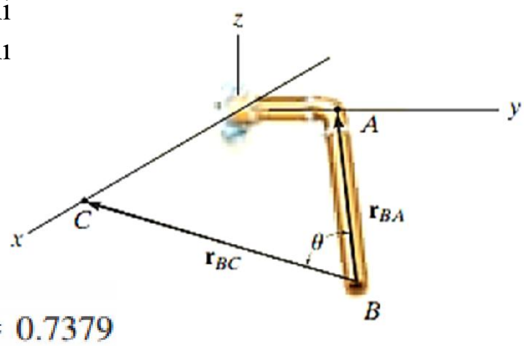
ÖRNEK:

Şekildeki boruya B ucundan $F = 80\text{lb}$ kuvveti uygulanmaktadır. **F** ile borunun BA parçası arasındaki θ açısını ve **F**'nin, BA'ya paralel bileşeninin büyüklüğünü belirleyiniz.



ÇÖZÜM:

Önce, B'den A'ya ve B'den C'ye giden konum vektörlerini oluşturup, sonra bu iki vektör arasındaki θ açısını belirleyeceğiz

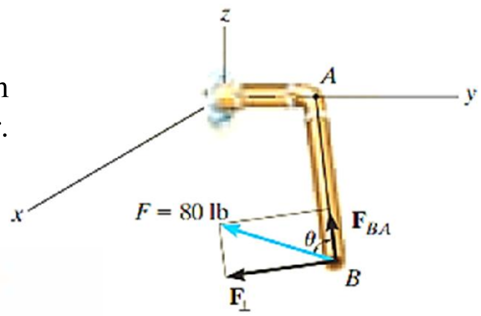


$$\mathbf{r}_{BA} = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ ft}, \quad r_{BA} = 3 \text{ ft}$$
$$\mathbf{r}_{BC} = \{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ ft}, \quad r_{BC} = \sqrt{10}\, ft$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{r}_{BC}}{r_{BA} r_{BC}} = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{3\sqrt{10}} = 0.7379$$
$$\theta = 42.5°$$

F kuvveti şekilde gösterildiği gibi bileşenlere ayrılır.

$F_{BA} = \mathbf{F} \,.\, \mathbf{u}_{BA}$ olduğundan, önce BA doğrultusundaki birim vektörü ve **F** kuvveti kartezyen vektör şeklinde formüle edilir.



$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{3} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = 80 \text{ lb}\left(\frac{\mathbf{r}_{BC}}{r_{BC}}\right) = 80\left(\frac{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}}{\sqrt{10}}\right) = -75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}$$

$$F_{BA} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{BA} = (-75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$
$$= 0\left(-\frac{2}{3}\right) + (-75.89)\left(-\frac{2}{3}\right) + (25.30)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= 59.0 \text{ lb}$$

PARÇAÇIK DENGESİ

ÜÇ BOYUTLU KUVVET SİSTEMLERİ

Parçacığın dengede kalma durumu;

$$\sum F = 0$$

Parçacık üzerine etkiyen kuvvetler i, j, k bileşenlerine ayrılırsa;

$$\sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k = 0$$

Buna göre, şu üç skaler bileşen denkleminin sağlanması gerekmektedir;

$$\sum F_x = 0$$

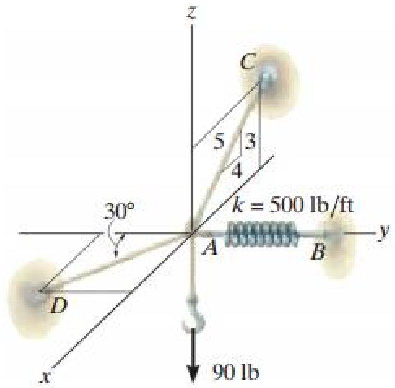
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Bu denklemler, parçacığa etkiyen *x*, *y*, *z* kuvvet bileşenlerinin cebirsel toplamlarım göstermektedir. Bunları kullanarak, genellikle, serbest cisim diyagramında gösterilen açılar ve kuvvetlerin büyüklükleri olan en fazla üç bilinmeyen çözebilmektedir.

ÖRNEK:

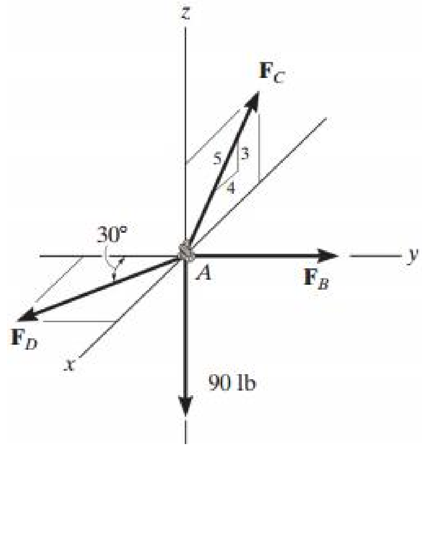
90 lb'luk yük, şekilde gösterilen kancadan asılıdır. Yük, iki ip ve k=500 lb/ft katsayılı yay ile tutulmaktadır. Denge durumunda, iplerdeki kuvveti ve yayın gerilme miktarını belirleyiniz. *AD* ipi x-y düzleminde ve *AC* ipi x-z düzleminde bulunmaktadır



ÇÖZÜM:

Yayın gerilme miktarı, yaydaki kuvvet belirlendikten sonra bulunabilir.

<u>*Serbest Cisim Diyagramı*</u>: Denge analizi için *A* noktası seçilir, çünkü ip kuvvetleri bu noktadan geçmektedir. Serbest cisim diyagramı şekilde gösterildiği gibi oluşturulabilir.



<u>*Denge Denklemleri*</u>: Her bir kuvvetin kolayca *x*, *y*, *z* bileşenlerine ayrılabildiği görülmektedir, dolayısıyla üç skaler denge denklemi uygulanabilir. Pozitif eksenler boyunca yönlenmiş bileşenlerin pozitif olduklarını göz önüne alarak,

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_D \sin 30^\circ - \left(\tfrac{4}{5}\right) F_C = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -F_D \cos 30^\circ + F_B = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \left(\tfrac{3}{5}\right) F_C - 90 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$

$$F_C = 150 \text{ lb}$$

$$F_D = 240 \text{ lb}$$

$$F_B = 207.8 \text{ lb} = 208 \text{ lb}$$

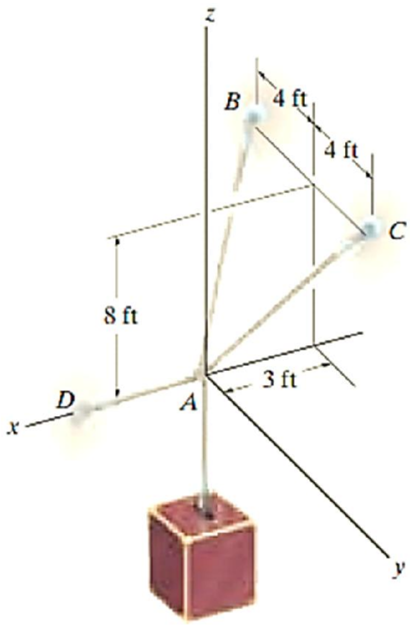
$$F_B = k s_{AB}$$

$$207.8 \text{ lb} = (500 \text{ lb/ft})(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.416 \text{ ft}$$

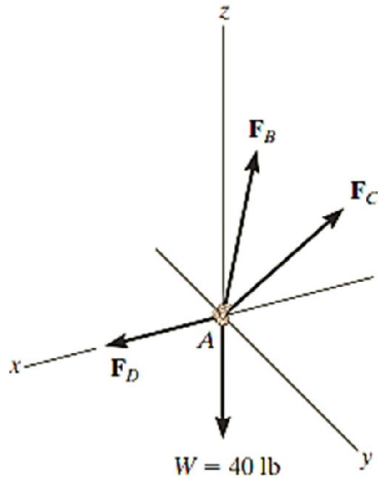
ÖRNEK:

Şekilde gösterilen 40 lb'luk sandığı taşımak için kullanılan kabloların her birinde ortaya çıkan kuvveti belirleyiniz



ÇÖZÜM:

Serbest Cisim Diyagramı: Şekilde gösterildiği gibi, kablolardaki üç bilinmeyen kuvveti "açığa çıkarmak" için A noktasının serbest cisim diyagramını ele alırız ve denge koşulunu uygulayarak bu kuvvetlerin büyüklüklerini elde edebiliriz.



Denge Denklemleri: Önce her bir kuvveti kartezyen vektör formunda ifade edeceğiz. *B* ve *C* noktalarının koordinatları *B*(-3 ft, -4 ft, 8 ft) ve *C* (-3 ft, 4 ft, 8 ft) olduğundan,

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\}\ \text{lb}$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$-0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$-0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

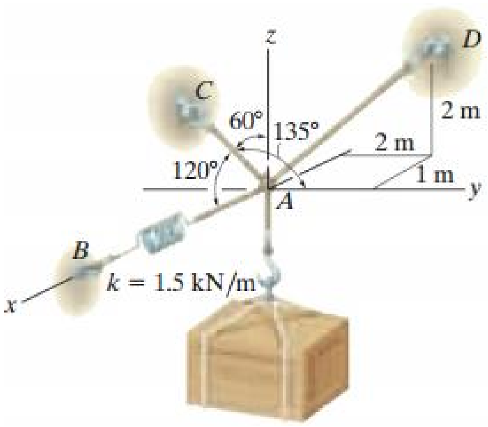
i, j, k bileşenlerinin ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesiyle;

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \qquad (3)$$

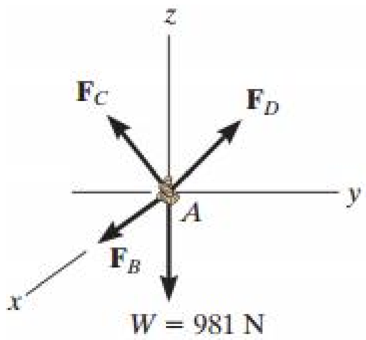
$$F_B = F_C = 23.6\ \text{lb}$$
$$F_D = 15.0\ \text{lb}$$

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen 100 kg'lık kutu, birine yay bağlanmış üç iple tutulmaktadır. Her bir ipteki çekme kuvvetini belirleyiniz.



ÇÖZÜM:



Serbest Cisim Diyagramı: Her bir ipteki kuvvet, *A* noktasının dengesi incelenerek belirlenebilir. Serbest cisim diyagramı şekilde gösterilmiştir. Kutunun ağırlığı W = 100(9.81) = 981 N'dur.

Denge Denklemleri: Serbest cisim diyagramında her bir vektör, önce kartezyen vektör formunda ifade edilir. $\mathbf{F}_D$ için D(-1 m, 2 m, 2 m)

$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C\cos 120°\mathbf{i} + F_C\cos 135°\mathbf{j} + F_C\cos 60°\mathbf{k}$$
$$= -0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\left[\frac{-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}\right]$$
$$= -0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = \{-981\mathbf{k}\}\text{ N}$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$F_B\mathbf{i} - 0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$
$$-0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k} - 981\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

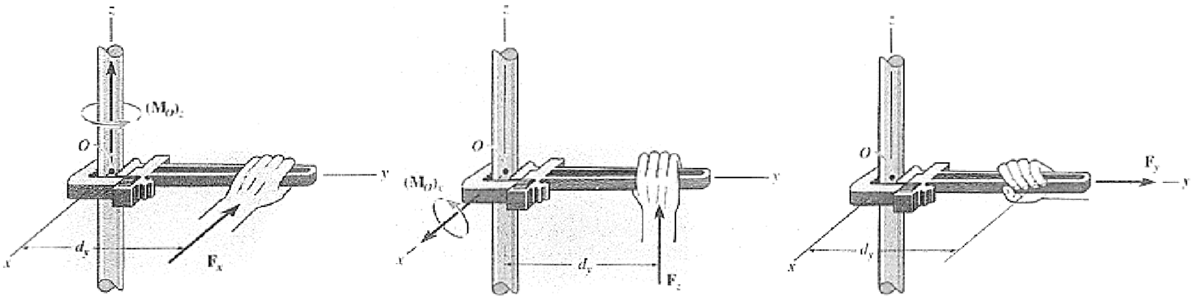
$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_B - 0.5F_C - 0.333F_D = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.707F_C + 0.667F_D = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.5F_C + 0.667F_D - 981 = 0 \qquad (3)$$

$$F_C = 813\text{ N}$$
$$F_D = 862\text{ N}$$
$$F_B = 694\text{ N}$$

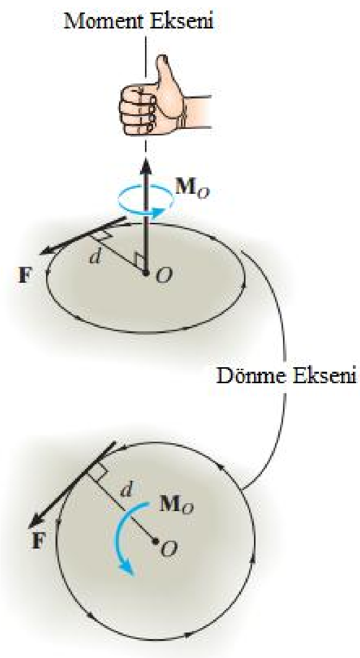
KUVVET SİSTEMİ BİLEŞKELERİ

Bir Kuvvetin Momenti – Skaler Gösterim

Bir kuvvetin bir noktaya veya bir eksene göre momenti, kuvvetin bir cismi bu nokta veya eksen etrafında döndürme eğiliminin bir ölçüsünü gösterir. Örneğin, ingiliz anahtarının koluna dik etkiyen ve O noktasından d_y mesafesinde bulunan şekilde gösterilen $\mathbf{F}_x$, yatay kuvvetini ele alalım. Bu kuvvetin boruyu z ekseni etrafında döndürme eğiliminde olduğu görülmektedir. $\mathbf{F}_x$'in neden olduğu bu dönme eğilimine zaman zaman tork dendiği olur, fakat genellikle buna bir kuvvetin momenti veya kısaca $(\mathbf{M}_0)_z$, momenti denir. Özellikle, moment ekseninin (z), $\mathbf{F}_x$ ve d_y'yi içeren (x-y) taralı düzleme dik olduğuna ve bu eksenin düzlemi O noktasında kestiğine dikkat ediniz. İkinci şekilde gösterilen anahtara $\mathbf{F}_z$ kuvvetinin uygulanmasını ele alalım. Bu kuvvet, boruyu z ekseni etrafında döndürmez, onu x ekseni etrafında döndürme eğilimindedir. Gerçekte boruyu bu şekilde döndürmesi mümkün olmadığı halde, yine de $\mathbf{F}_z$ döndürme eğilimi yaratır, dolayısıyla $(M_0)_x$ momenti üretilir. Önceki gibi, kuvvet ve d_y, moment eksenine (x) dik olan (y-z) taralı düzlemde yer alır. Anahtara $\mathbf{F}_y$ kuvveti uygulanırsa, O noktasına göre hiç moment üretilmez. Buna, kuvvetin etki çizgisinin O'dan geçmesi ve dolayısıyla hiçbir döndürme eğiliminin olmaması neden olur.



Bahsedilen bu durumu genelleştirerek, aşağıda şekilde gösterilen sistemde düzlemde bulunan **F** kuvvetini ve *O* noktasını ele incelendiğinde, *O* noktasına veya *O*'dan geçen ve düzleme dik olan eksene göre M_0 momenti vektörel bir büyüklüktür, çünkü belirli bir büyüklük ve doğrultuya sahiptir.



Büyüklük: $\mathbf{M}_0$'ın büyüklüğü:

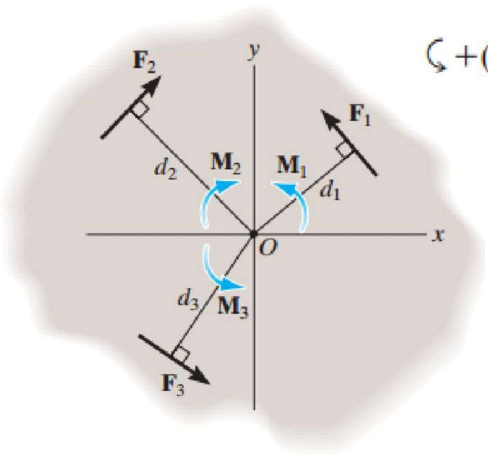
$$M_O = Fd$$

Buradaki d, moment kolu veya *O* noktasındaki eksenden kuvvetin etki çizgisine dik uzaklık olarak adlandırılır. Moment büyüklüğünün birimleri, kuvvet çarpı uzaklıktan oluşur, N x m gibi.

Doğrultu: $\mathbf{M}_0$'ın doğrultusu (ve yönü) "sağ el kuralı" kullanılarak belirlenir. Bunun için, sağ elin parmakları, kuvvet *O* noktası etrafında dönme sağlayabildiğinde ortaya çıkan dönme yönünü izleyecek şekilde kıvrılır. Bu takdirde, başparmak, **F** ve *d*'yi içeren taralı düzleme dik ve yukarı doğru olan moment vektörünün doğrultu ve yönünü veren monteni eksenini işaret eder.

Düzlemsel Kuvvet Sisteminin Bileşke Momenti:

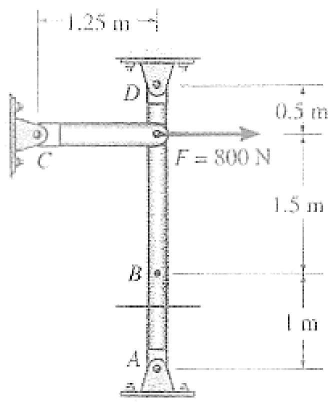
Bir kuvvet sistemi *x-y* düzleminde yer alırsa, her bir kuvvetin *O*'ya göre momenti *z* ekseni yönünde olacaktır. Bundan dolayı, sistemin $\mathbf{M}_{R0}$ momenti, bütün kuvvetlerin momentlerinin cebirsel toplamı alınarak belirlenebilir, çünkü bütün moment vektörleri aynı doğrultudadır. Bu vektör aşağıdaki şekilde ifade edilir. Burada, denklemin yanındaki saatin tersi yöndeki yay, skaler işarete uymak amacıyla, herhangi bir kuvvetin momentinin, z ekseni yönündeyse pozitif, -z ekseni yönündeyse negatif olacağını göstermek amacıyla kullanılmıştır.



$$\circlearrowleft +(M_R)_o = \Sigma Fd; \qquad (M_R)_o = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen çerçeveye etkiyen 800N'luk kuvvetin A, B, C ve D noktalarına göre momentlerini belirleyiniz.



ÇÖZÜM (SKALER ANALİZ)

M_A = 800N *x* (2.5m) = 2000 N.m

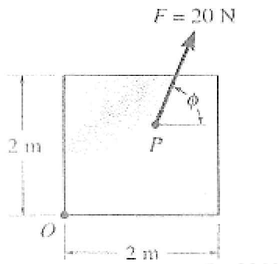
M_A = 800N *x* (1.5m) = 1200 N.m

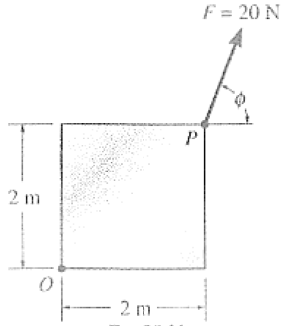
M_A = 800N *x* (0m) = 0 N.m (**F**'nin etki çizgisinin *C*'den geçmesinden dolayı)

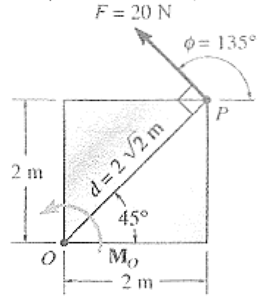
M_A = 800N *x* (0.5m) = 400 N.m

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen kare plağın düzleminde bulunan 20 N'luk kuvvetin, O noktasına göre en büyük momenti yaratması için, kuvvetin doğrultusu ve P uygulama noktasının konumu ne olmalıdır? Bu moment nedir?







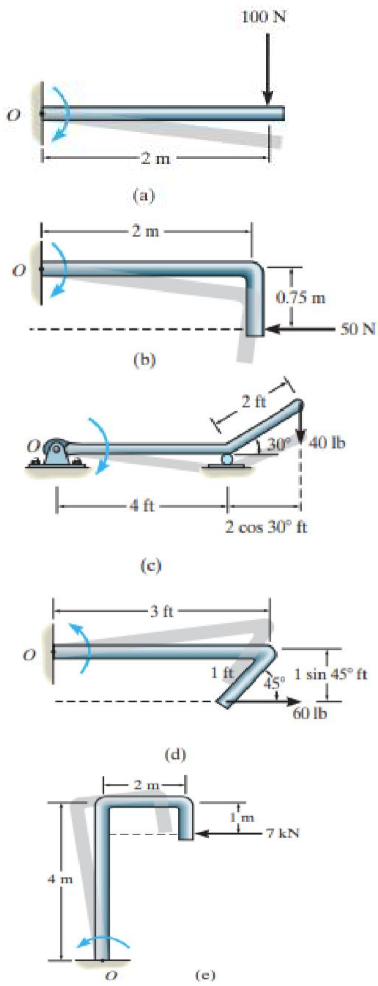
ÇÖZÜM (SKALER ANALİZ)

Kuvvetin yarattığı momentin maksimum olması isteniyor, dolayısıyla kuvvet plağa O noktasından en uzak mesafede etkimelidir. Bu nedenle, uygulama noktası, şekilde gösterildiği gibi, karenin köşegen üzerindeki köşesi olmalıdır. Plağın O noktası etrafındaki dönüşünün saatin tersi yönde olması için, **F**, $45° < \phi < 180°$ açısıyla etkimelidir. En büyük moment **F**'nin etki çizgisi d'ye dik olduğu zaman, yani $\phi = 135°$ iken oluşur. Buna göre, maksimum moment;

$$M_0 = Fd = (20N)(2\sqrt{2}m) = 56.6\ N.m$$

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen kare plağın düzleminde bulunan 20 N'luk kuvvetin, O noktasına göre en büyük momenti yaratması için, kuvvetin doğrultusu ve P uygulama noktasının konumu ne olmalıdır? Bu moment nedir?



ÇÖZÜM (SKALER ANALİZ)

d moment kolunu oluşturmak için, her bir kuvvetin etki çizgisi kesikli çizgilerle uzatılmıştır. Ayrıca, kuvvetin elemana vereceği dönme eğilimi de gösterilmiştir. Bundan başka, kuvvetin döndürme yönü renkli yay ile gösterilmektedir. Buna göre;

$(a)\ \ M_0 = (100N)(2m) = 200\ N.m$

$(b)\ \ M_0 = (50N)(0.75m) = 37.5\ N.m$

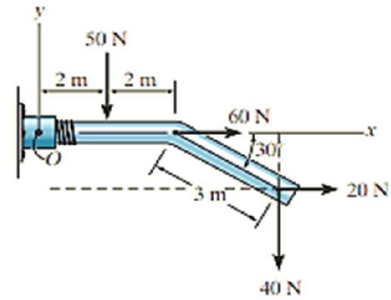
$(c)\ \ M_0 = (40lb)(4ft + 2cos30^0 ft) = 229\ lb.ft$

$(d)\ \ M_0 = (60lb)(1cos45^0 ft) = 42.4\ lb.ft$

$(e)\ \ M_0 = (7kN)(4m - 1m) = 21\ kN.m$

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen çubuk üzerine etkiyen dört kuvvetin *O* noktasına göre bileşke momentini belirleyiniz.



ÇÖZÜM (SKALER ANALİZ)

$$+ (M_R)_0 = \sum Fd$$

$$= -50N(2m) + 60N(0) + 20N(3sin30^0m - 40N(4m + 3cos30^0m$$

$$= 334\ N.m$$

REFERANSLAR

1. Mühendislik Mekaniği-Statik (Metrik Baskı), R.C. HİBBELER, S.C. FAN, Çevirenler: Ayşe SOYUÇOK, Özgün SOYUÇOK, Literatür Yayınları, 1. Basım, Mart 2005, ISBN: 975-04-0217-0.

2. Statik-Mukavemet Ders Notları, Prof. Dr. Zihni ZERİN, OMÜ, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü.

3. Statik Ders Notları, Prof. Dr. Muzaffer Topçu, PAÜ Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü.

4. Statik Ders Notları, Doç. Dr. Hüseyin BAYIROĞLU, YTÜ, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü.

5. Statik Ders Notları, Prof. Dr. Cesim ATAŞ, DEÜ, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü.