Vektörel Çarpım

A ve B vektörlerinin vektörel çarpımı şu şekilde ifade edilebilmektedir.

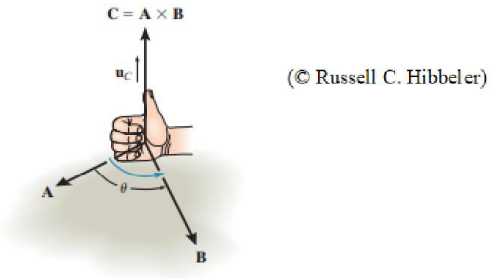
C = **A** x **B** (**A** vektörel çarpım **B**, eşittir **C**)

C vektörünün büyüklüğü $C = ABsin\theta$

C vektörünün yönü **A** ve **B** vektörlerini içeren düzlemine diktir ve sağ el kuralına göre belirlenmektedir. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi sağ elin parmakları **A**'dan **B**'ye doğru kıvrıldığında, başparmak **C**' nin yönünü gösterir.

C'nin doğrultusu ve yönünü bilindiği takdirde;

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (ABsin\theta)\mathbf{u}_C$

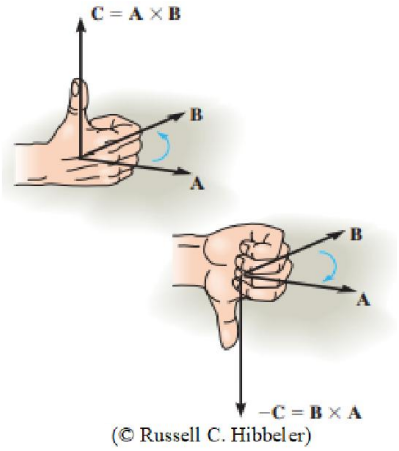


Uygulama Kuralları:

- Değişme özelliği geçerli değildir. Yani **A** x **B** ≠ **B** x **A**
  Sağ el kuralına göre **B** x **A**, **A** x **B**'nin aynı büyüklüğüne sahip olmasına karşın, yönü zıt olmaktadır.

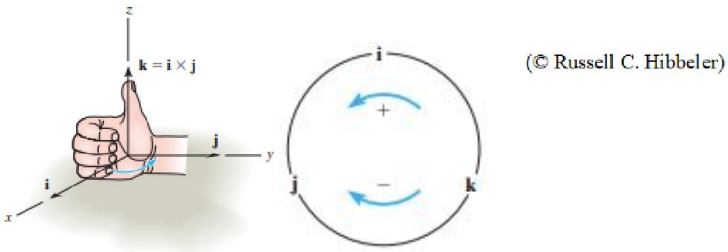
- Vektörel çarpım bir skaler büyüklük ile çarpılırsa şu şekilde gösterilebilmektedir.
  $\alpha(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\alpha\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\alpha$

- Vektör çarpımı dağılma özelliğine sahiptir.
  A x (**B** + **D**) = (**A** x **B**) + (**A** x **D**)



Kartezyen Vektör Gösterimi

Kartezyen birim vektör **i** x **j**'yi bulmak için, vektörün büyüklüğü *(i)(j)sin90* = (1)(1)(1)= 1 ve yönü de sağ el kuralına belirlenir ve şekilde gösterildiği gibi vektörün yönü +**k** yönündedir. Bir daire oluşturarak, iki vektörün vektörel çarpımı saatin ters yönünde karşılık gelen üçüncü birim vektördür denilebilir, yani **k** x **i** = **j**, **i** x **k** = -**j**.



A ve B vektörleri için genel olarak gösterildiği takdirde;

$A \times B = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$

$= A_x B_x(\mathbf{i} + \mathbf{i}) + A_x B_y(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + A_x B_z(\mathbf{i} + \mathbf{k})$

$+ A_y B_x(\mathbf{j} + \mathbf{i}) + A_y B_y(\mathbf{j} + \mathbf{j}) + A_y B_z(\mathbf{j} + \mathbf{k})$

$+ A_z B_x(\mathbf{k} + \mathbf{i}) + A_z B_y(\mathbf{k} + \mathbf{j}) + A_z B_z(\mathbf{k} + \mathbf{k})$

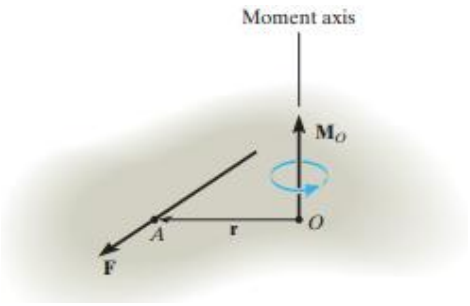
Sonuç olarak;

$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$

Determinant formunda;

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

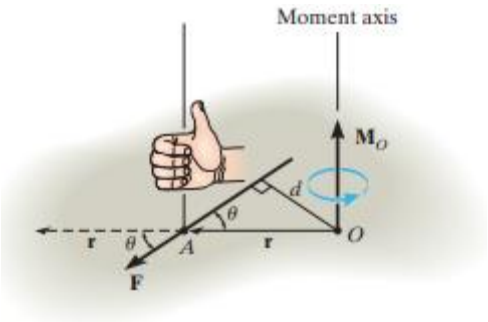
Bir Kuvvetin Momenti – Vektörel Gösterim



O noktasına göre **F** kuvvetinin momenti (moment ekseninin O noktasından geçmesi ve *O* noktası ve **F** kuvvetinin bulunduğu düzleme dik olması durumunda) vektörel çarpım şeklinde şu şekilde ifade edilmektedir.

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

r vektörü O noktasından F kuvvetinin etki çizgisi boyunca herhangi bir noktanın konum vektörünü göstermektedir.



(© Russell C. Hibbeler)

Vektörel çarpım sonucu $\mathbf{M}_0$'ın büyüklüğü

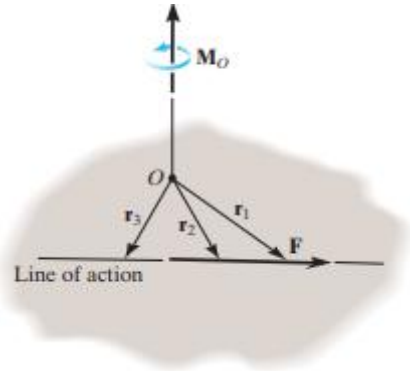
$$M_0 = rF\sin\theta$$

θ **r** *ve* **F** vektörleri arasındaki açıdır.

Moment kolu: $r\sin\theta$

$$M_0 = rF\sin\theta = F(r\sin\theta) = Fd$$

$\mathbf{M}_0$ vektörünün doğrultu ve yönü sağ el kuralı uygulanarak belirlenir. Kuvvetin doğrultusunda sağ el parmaklarını kıvırarak, başparmak yukarı yöne ve **r** ve **F** kuvvetini içeren düzleme dik yönlendirerek bulunur.



Kuvvetin taşınabilirliği

Şekildeki gibi uygulanan **F** kuvvetini incelersek, *O* noktasına göre F kuvvetinin oluşturduğu moment **r** konum vektörünün *O*'dan **F**'nin etki çizgisi üzerindeki herhangi bir nokta göz önünde bulundurularak hesaplanabilmektedir.

Dolayısıyla;

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}$$

Kartezyen Vektör Gösterimi

x, y, z koordinat sisteminde **r** konum vektörü ve **F** kuvveti kartezyen vektör olarak şu şekilde ifade edilmektedir.

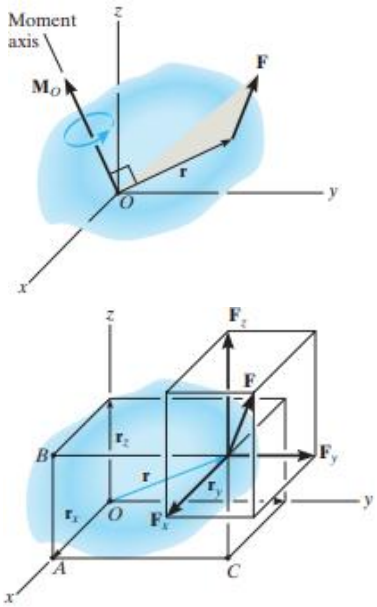
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

r_x, r_y, r_z konum vektörünün O noktasından kuvvetin etki çizgisine olan herhangi bir noktanın *x, y, z* bileşenlerini göstermektedir.

F_x, F_y, F_z Kuvvet vektörünün *x, y, z* koordinat eksenlerindeki bileşkelerini göstermektedir.

Determinantın açılımı;

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$



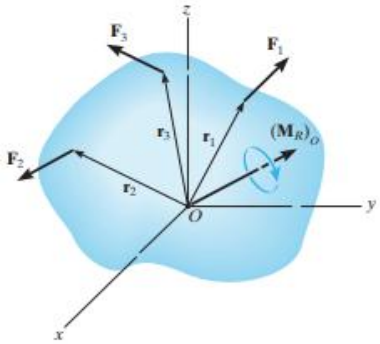
(© Russell C. Hibbeler)

Buradaki üç moment bileşeninin fiziksel anlamı yukardaki şekil incelenerek açıklanabilir. Örnek olarak, $\mathbf{M}_O$'ın **i** bileşeni $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ ve $\mathbf{F}_z$ kuvvetlerinin x eksenine göre momentlerinden hesaplanır. $\mathbf{F}_x$ kuvveti x eksenine paralel olmasından dolayı, x ekseni etrafında dönmeye yol açmaz. $\mathbf{F}_y$ kuvvetinin etki çizgisi *B* noktasından geçer ve bu nedenle $\mathbf{F}_y$ kuvvetinin *x* ekseni üzerindeki *A* noktasına göre momentinin büyüklüğü $r_z F_y$ olur. Sağ el kuralına göre, bu bileşen negatif **i** yönünde etkisi oluşur. Dolayısıyla, $(\mathbf{M}_O)_x = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i}$ olarak elde edilir.

Kuvvet Sisteminin Bileşke Momenti:

Bir cisme şekildeki gibi kuvvetler etki ettiğinde, *O* noktasında oluşacak bileşke moment, her bir kuvvetin *O* noktasında meydana getireceği momentlerin vektörel toplamı olarak ifade edilmektedir.

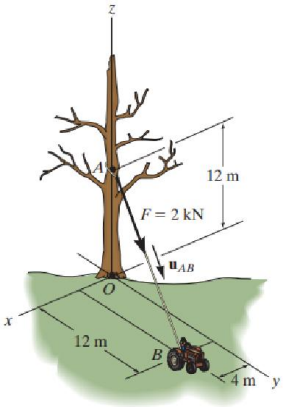
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma\, (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



(© Russell C. Hibbeler)

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen kuvvetin O noktasında oluşturduğu momenti kartezyen vektör şeklinde hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

$\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ konum vektörleri O noktasında **F** kuvvetinin meydana getireceği momenti bulmak için kullanılacaktır.

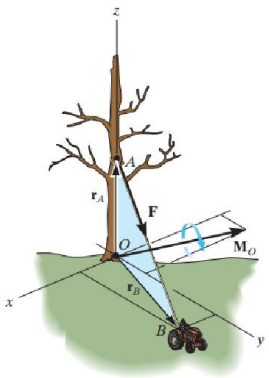
$$\mathbf{r}_A = (12\mathbf{k})m \;\; ve \; \mathbf{r}_B = (4\mathbf{i} + 12\mathbf{j})m$$

F kuvvetini kartezyen vektör olarak ifade edersek;

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 2kN\left[\frac{(4\mathbf{i} + \; 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k})m}{\sqrt{(4m)^2 + \; (12m)^2 + \; (-12m)^2}}\right]$$

$$= (0.4588\mathbf{i} + 1.376\mathbf{j} - 1.376\mathbf{k})kN$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_A \; x \; \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$



(© Russell C. Hibbeler)

$$= \; [0(-1.376) - 12(1.376)]\mathbf{i} - \; [0(-1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{j} + [0(1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{k}$$

$$= (-16.5\mathbf{i} + 5.5\mathbf{j}) \text{ kN.m}$$

Diğer bir yolla;

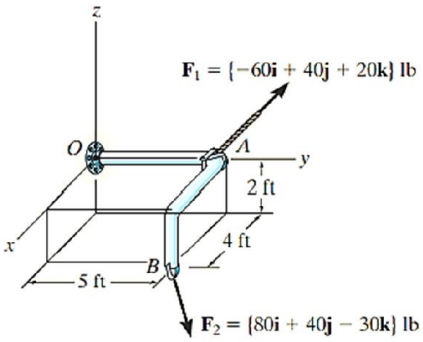
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_B \; x \; \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$$= \; [12(-1.376) - 0(1.376)]\mathbf{i} - \; [4(-1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{j} + [4(1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{k}$$

$$= (-16.5\mathbf{i} \; + 5.5\mathbf{j}) \text{ kN.m}$$

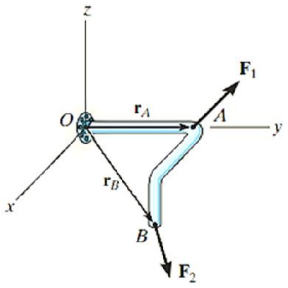
ÖRNEK:

Şekilde gösterilen çubuğa 2 kuvvet etki etmektedir. O noktasında oluşan bileşke momenti kartezyen vektör şeklinde hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

$\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ konum vektörleri O noktasında **F** kuvvetinin meydana getireceği momenti bulmak için kullanılacaktır.



(© Russell C. Hibbeler)

$\mathbf{r}_A = (5\mathbf{j})ft \;\; ve \; \mathbf{r}_B = (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \; 2\mathbf{k})ft$

$$(\mathbf{M}_R)_0 = \sum \mathbf{r} \; x \; \mathbf{F}$$

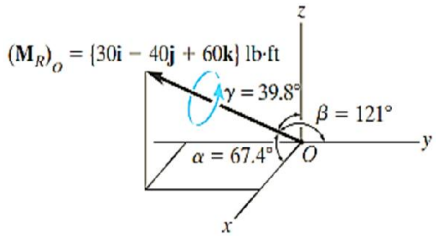
$$= \mathbf{r}_A \; x \; \mathbf{F}_1 + \; \mathbf{r}_B \; x \; \mathbf{F}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$= \; [5(20) - 0(40)]\mathbf{i} - \; [0]\mathbf{j} + [0(40) - 5(-60)]\mathbf{k}$$

$$+ [5(-30) - (-2)(40)]\mathbf{i} - \; [4(-30) - (-2)(80)]\mathbf{j} + [4(40) - 5(80)]\mathbf{k}$$

$$= (30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} \; + 60\mathbf{k}) \; lb.ft$$



(© Russell C. Hibbeler)

Momentin büyüklüğü;

$$M_{R0} = \sqrt{(30)^2 + (-40)^2 + \; (60)^2} = 78.10 \text{ lb. ft}$$

Moment ekseninin doğrultusunu tanımlayan birim vektör;

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{M}_{R0}}{M_{R0}} = \frac{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}}{78.10} = 0.384\mathbf{i} - 0.512\mathbf{j} + 0.768\mathbf{k}$$

Koordinat doğrultu açıları;

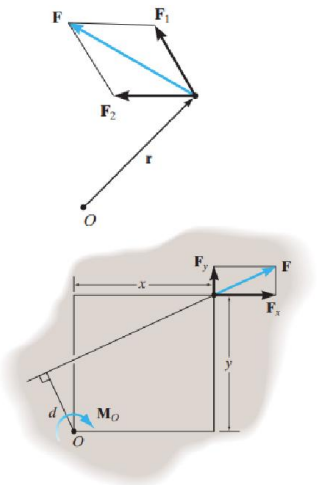
$\cos\alpha = 0.3841; \quad \alpha = 67.4^0$

$\cos\beta = -\,0.521; \quad \beta = 121^0$

$\cos\gamma = 0.7682; \quad \gamma = 39.8^0$

Momentler Kuralı

Varignon's teoremi olarak ta bilinen ve vektörel çarpımın dağılma özelliğinin kullanılmasına dayanan bu kural, bir kuvvetin bir noktaya göre momentinin, bu kuvvetin bileşenlerinin bu noktaya göre momentlerinin toplamına eşit olduğunu ifade etmektedir.



(© Russell C. Hibbeler)

Örnek olarak, şekildeki **F** kuvvetini iki bileşenine ayırdığımızda, bileşenlerin *O* noktasında meydana getireceği moment değeri, **F** kuvvetinin *O* noktasında oluşturacağı moment değerine eşittir. Dolayısıyla şu şekilde ifade edilebilmektedir;

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

İki boyutlu problemlerin çözümünde, momentler kuralını uygulayarak, kuvveti iki dik bileşenine ayırıp skaler olarak moment değerini hesaplayabiliriz.

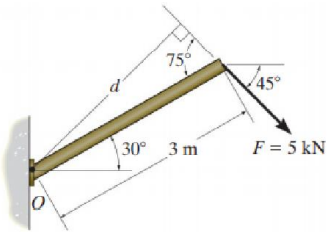
$$M_0 = F_x y - F_y x$$

Ayrıca kuvvetin O noktasına dik mesafesini hesaplayarak ta moment değeri elde edilebilir.

$$M_0 = Fd$$

ÖRNEK:

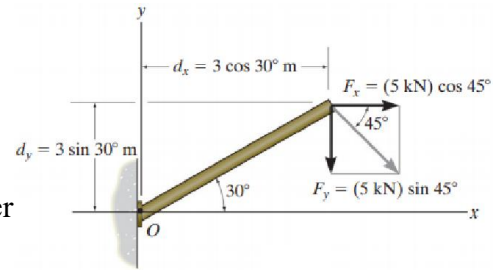
Şekilde gösterilen çubukta *O* noktasına etki eden momenti hesaplayınız.



ÇÖZÜM 1:

Moment kolu; $d = (3\text{m})\ (\sin 75^0) = 2.898$ m

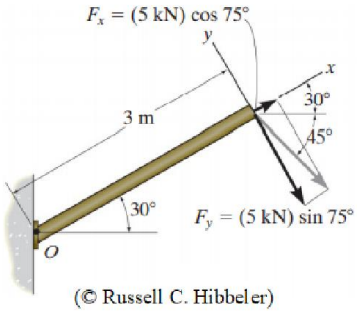
Moment; $M_0 = Fd = (5\text{kN})(2.898\ \text{m}) = 14.5$ kN.m



ÇÖZÜM 2:

Kuvveti *x* ve *y* bileşenlerine ayrılarak ta çözülebilir. Saatin ter yönü pozitif olduğunu göz önünde bulundurarak;

$$\circlearrowleft + M_0 = -F_x d_y - F_y d_x$$
$$= -(5\cos 45^0\ \text{kN})(3\sin 30^0\text{m}) - (5\sin 45^0\ \text{kN})(3\cos 30^0\ \text{m})$$
$$= -14.5\ \text{kN.m} = 14.5\ \text{kN.m}\ \circlearrowright$$



(© Russell C. Hibbeler)

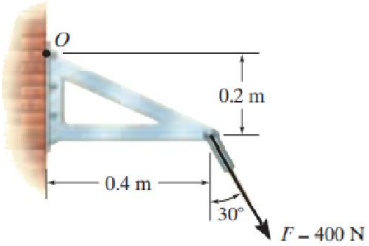
ÇÖZÜM 3:

Kuvveti çubuğa dik ve paralel olacak şekilde bileşenlerine ayırırsak, $\mathbf{F}_x$ bileşeni O noktasına herhangi bir moment oluşturmayacaktır ve dolayısıyla;

$$\circlearrowleft + M_0 = -F_y d_x$$
$$= -(5\sin 75^0\ \text{kN})(3\text{m})$$
$$= -14.5\ \text{kN.m} = 14.5\ \text{kN.m}\ \circlearrowright$$

ÖRNEK:

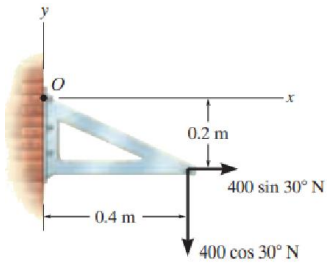
Şekilde gösterilen desteğin köşesine etki eden **F** kuvvetinin O noktasında meydana getireceği momenti hesaplayınız.



SKALER ÇÖZÜM

$+ M_O = 400\sin 30^0 N(0.2m) - 400\cos 30^0 N(0.4m)$

$= -98.6 \text{ N.m} = 14.5 \text{ N.m}$



VEKTÖREL ÇÖZÜM:

$\mathbf{r} = (0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})\text{m}$

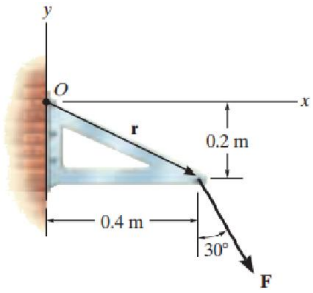
$\mathbf{F} = (400\sin 30^0\mathbf{i} - 400\cos 30^0\mathbf{j})\text{N} = (200\mathbf{i} - 346.4\mathbf{j})\text{N}$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200 & -346.4 & 20 \end{vmatrix}$$

$= [5(20) - 0(40)]\mathbf{i} - [0]\mathbf{j} + [0(40) - 5(-60)]\mathbf{k}$

$+ 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + [0.4(-346.4) - (-0.2)(200)]\mathbf{k}$

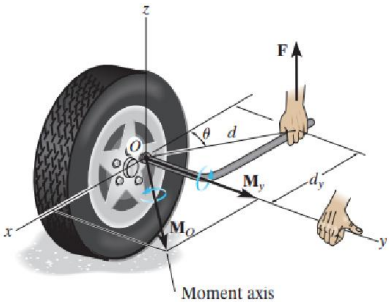
$= (-98.6\mathbf{k})\ \text{N.m}$



(© Russell C. Hibbeler)

Bir Kuvvetin Belirli Bir Eksene Göre Momenti

Bazı durumlarda, bir kuvvetin belirli bir eksen etrafında meydana getirdiği momenti bulmak gerekebilir. Şekilde gösterilen bir tekerleğin vidası bir anahtar vasıtasıyla gevşetmek istenirse, uygulanacak kuvvet *O* noktasından geçen moment ekseni etrafında dönme etkisi oluşturacaktır ve buda sadece *y* ekseni etrafında bir dönmeye sebep olmuş olur. Dolayısıyla, meydana gelen toplam momentten ziyade y ekseninde oluşan moment yeterli olacaktır.



(© Russell C. Hibbeler)

Skaler Analiz:

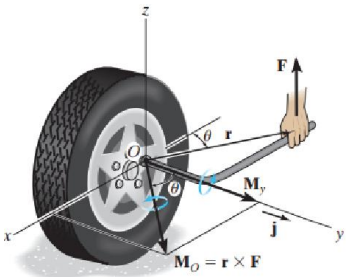
Şekildeki örneği ele alacak olursak, moment kolu ya da kuvvetin etki çizgisinin eksene dik uzaklığı şu şekilde oluşur;

$d_y = d \cos\theta$

F kuvvetinin *y* eksinde meydana getirdiği moment;

$M_y = Fd_y = F(d \cos\theta)$

Vektörel Analiz:



Şekildeki gösterilen F kuvvetinin y eksenine göre momentinin vektörel olarak elde edilmesi gerekiyorsa, öncelikle y ekseninde herhangi bir *O* noktasında kuvvetin meydana getireceği momentin hesaplanması gerekmektedir.

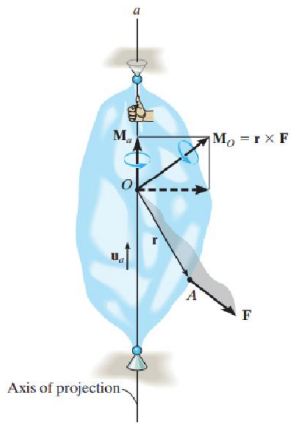
$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\mathbf{M}_0$'ın *y* eksenindeki izdüşümü, *y* ekseni boyunca bileşkesi $\mathbf{M}_y$ olmaktadır. Önceki bölümlerde gördüğümüz nokta çarpım kullanılarak;

$M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_0 = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$

Genel bir ifadeyle, şekilde gösterildiği gibi α ekseni boyunca $\mathbf{u}_a$ birim vektörünü belirleyerek şu ifade yazılabilir;

$\mathbf{M}_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$



(© Russell C. Hibbeler)

$$M_a = \left[u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}\right] \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= u_{ax}\,(r_y F_z - r_z F_y) - u_{ay}\,(r_x F_z - r_z F_x) + u_{az}\,(r_x F_y - r_y F_x)$$

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

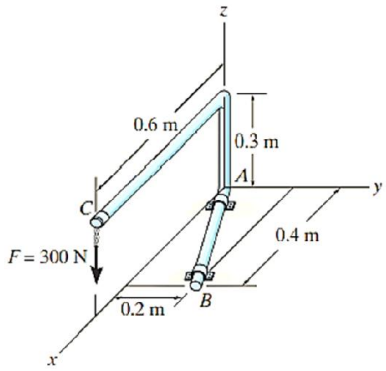
$u_{a_x}, u_{a_y}, u_{a_z}$ α ekseni boyunca birim vektörün *x*, *y*, *z* bileşenlerini göstermektedir.

r_x, r_y, r_z α ekseninde herhangi bir *O* noktasından kuvvetin etki çizgisi üzerindeki herhangi bir *A* noktasının konum vektörünün *x*, *y*, *z* bileşenlerini göstermektedir.

F_x, F_y, F_z kuvvet vektörünün *x*, *y*, *z* bileşenleridir.

ÖRNEK:

Şekilde gösterilen çubuğa etki eden **F** kuvvetinin *AB* ekseni boyunca meydana getireceği $\mathbf{M}_{AB}$ momentini hesaplayınız.

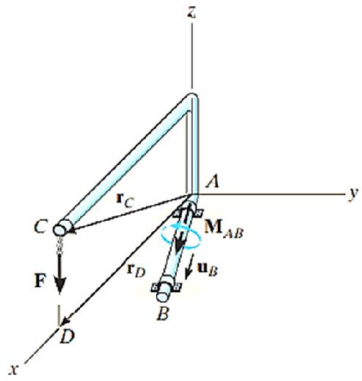


ÇÖZÜM:

Çubuğun AB ekseni boyunca tanımlanan birim vektör $\mathbf{u}_B$;

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{(0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j})}{\sqrt{(0.4m)^2 + (0.2m)^2}} = 0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}$$

r vektörü *AB* eksenindeki herhangi bir noktadan kuvvetin etki çizgisi üzerindeki herhangi bir nokta olarak tanımlanabilmektedir. Yani $\mathbf{r}_C$, $\mathbf{r}_D$, $\mathbf{r}_{BC}$ ya da $\mathbf{r}_{BD}$ kullanılabilir.



(© Russell C. Hibbeler)

$\mathbf{r}_D$ = (0.6**i**) m

F = (-300**k**) N

$$M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix}$$

= 0.8944[0(–300) – 0(0)] – 0.4472[0.6(–300) – 0(0)] + 0[0.6(0) – 0(0)] = 80.50 N.m

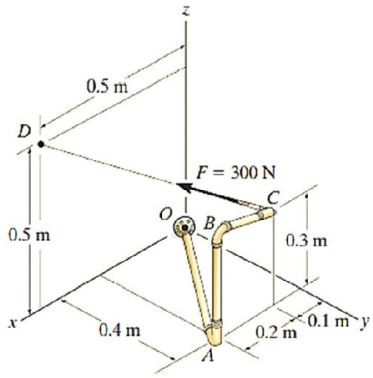
İşlemin pozitif çıkması $\mathbf{M}_{AB}$ ve $\mathbf{u}_B$ birim vektörünün yönlerinin aynı olduğunu göstermektedir.

$\mathbf{M}_{AB}$ momentini kartezyen vektör şeklinde gösterecek olursak;

$\mathbf{M}_{AB} = \mathbf{M}_{AB}\mathbf{u}_B$ = (80.50 N.m)(0.8944**i** + 0.4472**j**) = (72.0**i** + 36.0**j**) N.m

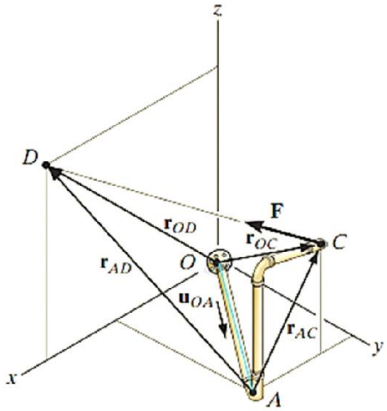
ÖRNEK:

Şekildeki **F** kuvvetinin *OA* ekseni boyunca meydana getireceği momenti hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

F kuvvetinin OA ekseni boyunca oluşturacağı moment $\mathbf{M}_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. **r** konum vektörü *OA* eksenindeki herhangi bir noktadan kuvvetin etki çizgisi üzerindeki herhangi bir nokta olarak tanımlanabilmektedir. Yani $\mathbf{r}_{OD}$, $\mathbf{r}_{OC}$, $\mathbf{r}_{AD}$ ya da $\mathbf{r}_{AC}$ kullanılabilir.



$$\mathbf{u}_{OA} = \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{(0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j})}{\sqrt{(0.3m)^2 + (0.4m)^2}} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$$

$\mathbf{r}_{OD} = (0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{k})$ m

$$\mathbf{F} = F\left(\frac{\mathbf{r}_{CD}}{r_{CD}}\right)$$

$$= (300N)\left(\frac{(0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k})m}{\sqrt{(0.4m)^2 + (-0.4m)^2 + (0.2m)^2}}\right)$$

$$= (200\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 100\mathbf{k})N$$

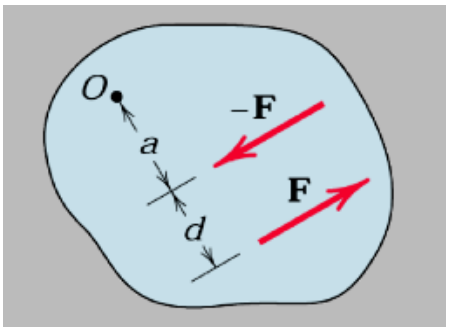
$\mathbf{M}_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F})$

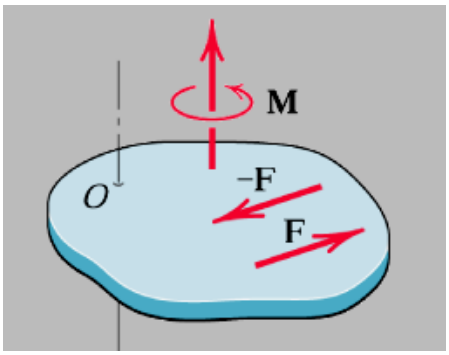
$$= \begin{vmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 200 & -200 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= 0.6[0(100) - (0.5)(-200)] - 0.8[0.5(100) - (0.5)(200) + 0 = 100 \text{ N.m}$$

Kuvvet Çifti (Couple)

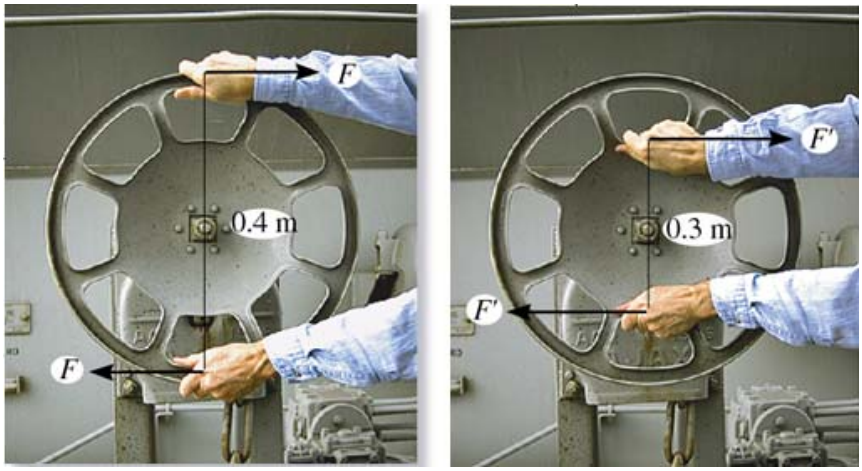
Bir **kuvvet çifti** şiddetleri eşit fakat yönleri zıt iki paralel kuvvetten meydana gelir.





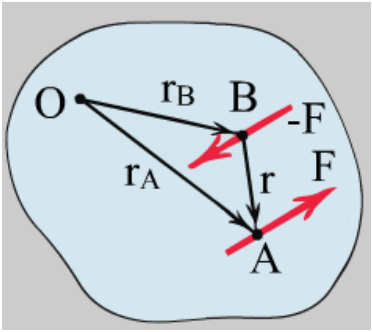
$$M_O = F(a + d) - Fa = Fd$$

Yani, kuvvet çiftinin momenti moment merkezinden (referans O noktası) bağımsızdır. Bu nedenle kuvvet çiftinin momenti bir "Serbest Vektör" dür.

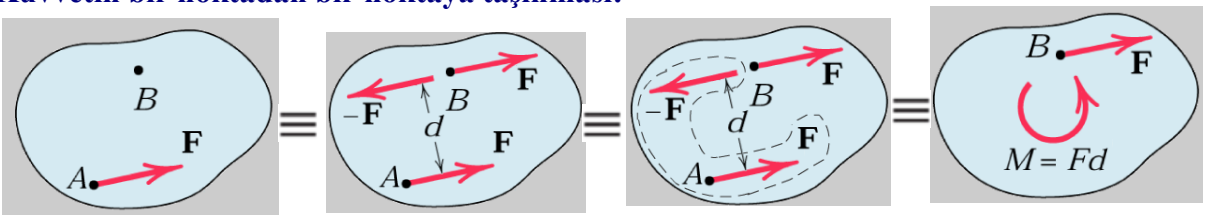


Vektörel olarak:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F})$$
$$= (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

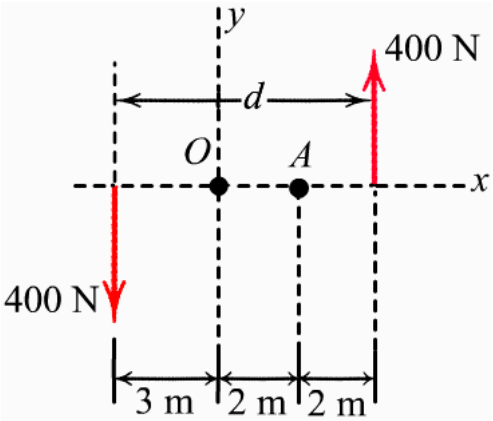


Kuvvetin bir noktadan bir noktaya taşınması:



Örnek Problem: Şekilde verilen 400 N'luk iki kuvvetin; a) O noktasına, b) A noktasına göre momentini bulunuz.

Çözüm:



Kuvvet çiftinin momenti;

$$M = Fd = 400(7) = 2800 \text{ N·m}$$

(a) $M_o = 400(3) + 400(4) = 2800$ N·m CCW

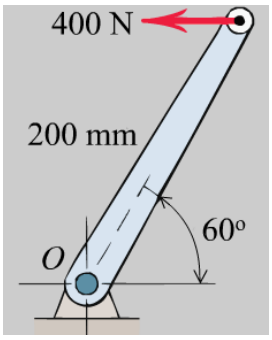
(b) $M_A = 400(5) + 400(2) = 2800$ N·m CCW

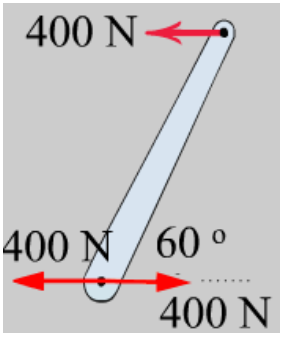
İki şıktaki sonuçlar aynı çıkmıştır. Sonuç olarak kuvvet çifti ile ilgili olan moment değerinin moment alınan noktadan bağımsız olduğunu söyleyebiliriz. Momenti,

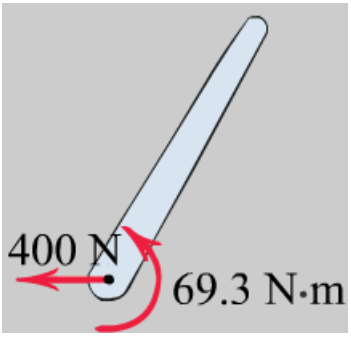
$M_o = Fd = 400(7) = 2800$ N·m **ile de bulabilirdik.**

Örnek Problem: Şekilde verilen 400 N'luk yatay kolu O noktasına (eşdeğer bir kuvvet ve moment çifti olarak) indirgeyiniz.

Çözüm:

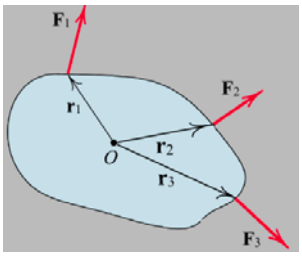


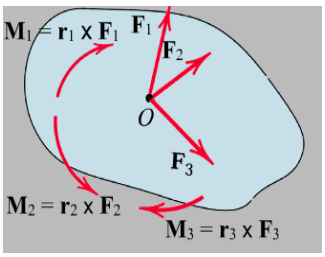




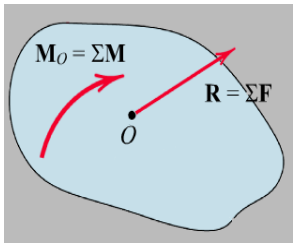
$$M = Fd = 400\,(0.200 \sin 60^\circ) = 69.3 \text{ N·m}$$

Kuvvetler Sisteminin İndirgenmesi

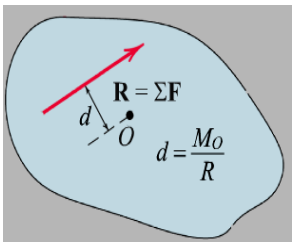




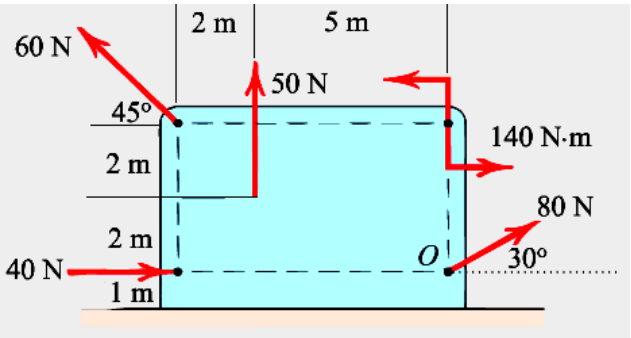
F_1, F_2 ve **F_3** ün O'ya taşınması



Eşdeğer bir kuvvet ve momente indirgeme



Kuvvet ve Momenti tek kuvvete indirgeme



Örnek Problem: Şekildeki plakaya etkiyen kuvvet çifti ve kuvvetleri eşdeğer bir kuvvete indirgeyiniz.

Çözüm:

$[R_x = \Sigma F_x]$ $\quad R_x = 40 + 80\cos 30^\circ - 60\cos 45^\circ = 66.9$ N

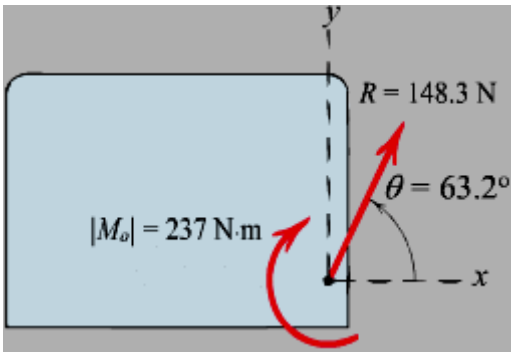
$[R_y = \Sigma F_y]$ $\quad R_y = 50 + 80\sin 30^\circ + 60\sin 45^\circ = 132.4$ N

$[R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}]$ $\quad R = \sqrt{(66.9)^2 + (132.4)^2} = 148.3$ N

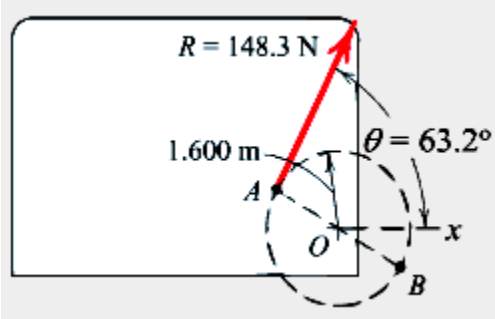
$\left[\theta = \tan^{-1}\dfrac{R_y}{R_x}\right]$ $\quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{132.4}{66.9} = 63.2^\circ$

$[\circlearrowleft + \; M_o = \Sigma(Fd)]$ $\quad M_o = 140 - 50(5) + 60\cos 45^\circ(4) - 60\sin 45^\circ(7)$

$= -237$ N·m

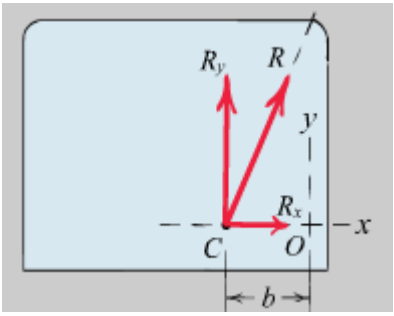


Tek kuvvete indirgeme:
Bunun için dört metot kullanılabilir:
1.



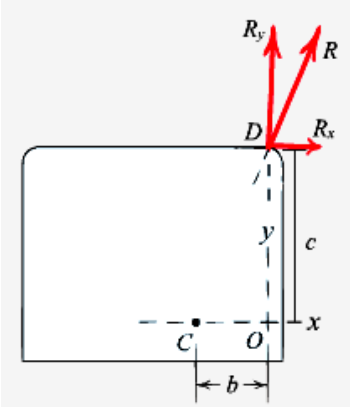
$$[Rd = |M_o|]$$
$$1.483d = 237$$
$$d = 1.600 \text{ m}$$

2.



$$R_y\, b = |M_o|$$
$$b = \frac{237}{132.4} = 1.792 \text{ m}$$

3.



$$R_x\, d = |M_o|$$
$$c = \frac{237}{66.9} = 3.54 \text{ m}$$

4.Daha genel bir yaklaşım için vektörel analiz kullanılabilir:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_o \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

burada **r,** O'dan başlayıp **R**'nin ekti çizgisi üzerindeki herhangi bir noktada biten bir konum vektörüdür.

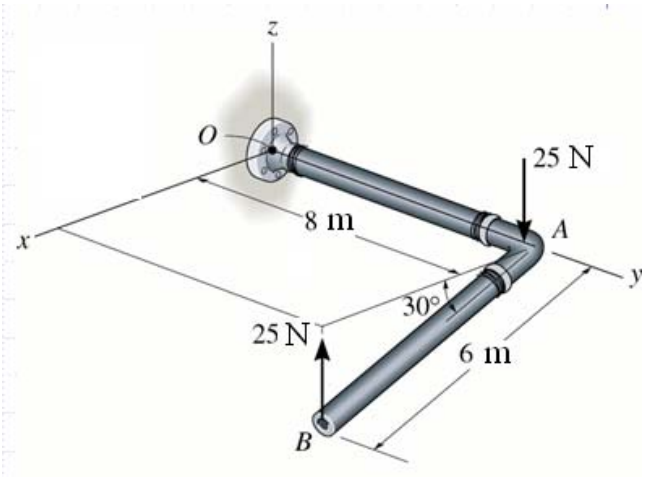
$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (66.9\mathbf{i} + 132.4\mathbf{j}) = -237\mathbf{k}$$
$$(132.4x - 66.9y)\mathbf{k} = -237\mathbf{k}$$

$$132.4x - 66.9y = -237$$

x=0 için y=3.54 m bulunur.

y=0 için x=-1.792 m bulunur. Skaler çözümle aynı sonuçlar elde edilir.

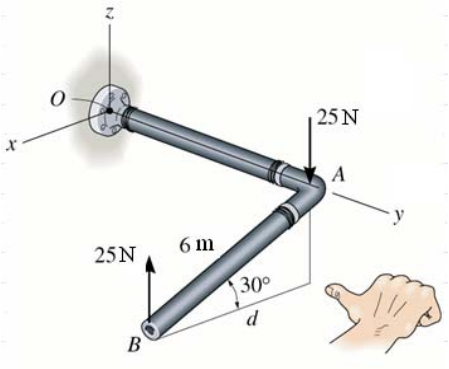
ÖRNEK



Kupl momenti skaler ve vektörel olarak bulunuz.

ÇÖZÜM:

Skaler Çözüm:



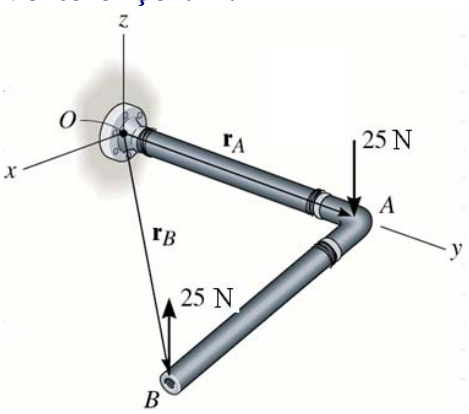
$$F = 25\ \text{N}$$

$$d = 6\cos 30^\circ = 5.2\ \text{m}$$

$$M = Fd = (25\,\text{m})(5.2\,\text{m})$$

$$M = 129.9\ \text{Nm}$$

Vektörel Çözüm:



1.

$$M_O = r_A \times (-25k) + r_B \times (+25k)$$

$$M_O = 8j \times (-25k)$$

$$+ (6\cos 30^\circ i + 8j - 6\sin 30^\circ k) \times (+25k)$$

$$M = -200i - 129.9j + 200i = (-129.9j)\ \text{M.m}$$

2.

$$M_O = r_{AB} \times (25k)$$

$$M_O = (6\cos 30^\circ i - 6\sin 30^\circ k) \times (+25k)$$

$$= (-130j)\ \text{Nm}$$

REFERANSLAR

1. Engineering Mechanics, Statics, Fourteenth Edition, 2016, R. C. Hibbeler, Pearson Prentice Hall, and ISBN-10: 0-13-391892-0.

2. Mühendislik Mekaniği-Statik (Metrik Baskı), R.C. HİBBELER, S.C. FAN, Çevirenler: Ayşe SOYUÇOK, Özgün SOYUÇOK, Literatür Yayınları, 1. Basım, Mart 2005, ISBN: 975-04-0217-0.

3. Statik-Mukavemet Ders Notları, Prof. Dr. Zihni ZERİN, OMÜ, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü.

4. Statik Ders Notları, Prof. Dr. Muzaffer Topçu, PAÜ Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü. http://www.kocaelimakine.com/wp-content/uploads/2013/04/statik-ders-notlari-muzaffer-topcu.pdf

5. Statik Ders Notları, Doç. Dr. Hüseyin BAYIROĞLU, YTÜ, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü. http://www.kocaelimakine.com/wp-content/uploads/2013/04/statik-ders-notlari-huseyin-bayiroglu.pdf

6. Statik Ders Notları, Prof. Dr. Cesim ATAŞ, DEÜ, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü. http://www.kocaelimakine.com/ders-notlari/statik-cesim-atas/