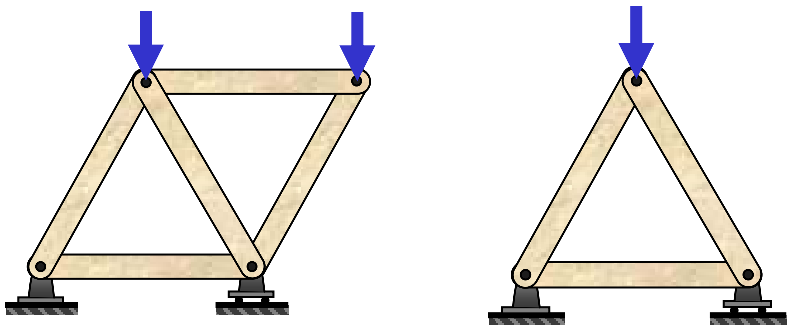
BÖLÜM 8

KAFES SİSTEMLERİ

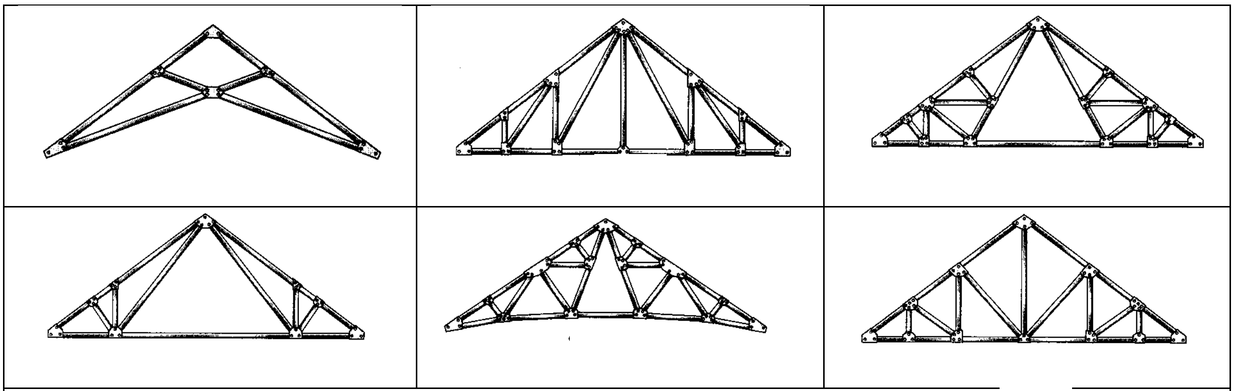
8.1 BİR KAFES SİSTEMİN TANIMI

Kafes sistemleri, mühendislikte kullanılan taşıyıcı sistemlerinin tiplerinden biridir. Birçok mühendislik probleminde, özellikle vinç, köprü ve bina projelerinde pratik ve ekonomik bir çözüm sağlar. Bir kafes sistemi, düğüm noktalarında birleşen doğru eksenli çubuklardan meydana gelir; tipik bir kafes sistem Şekil 8.1'de gösterilmiştir. Kafes sistemin çubukları yalnız uç noktalarında birbirlerine bağlanmıştır. Gerçek taşıyıcı sistemler birçok düzlem kafes sistemin bir uzaysal sistem oluşturacak şekilde birleştirilmesinden yapılmıştır. Her kafes sistemi, kendi düzleminde etkiyen yükleri taşıyacak şekilde projelendirildiğinden, iki boyutlu kafes sistem temel olmaktadır. Burada onun için öncelikle iki boyutlu kafes sistemleri ele alınacaktır.

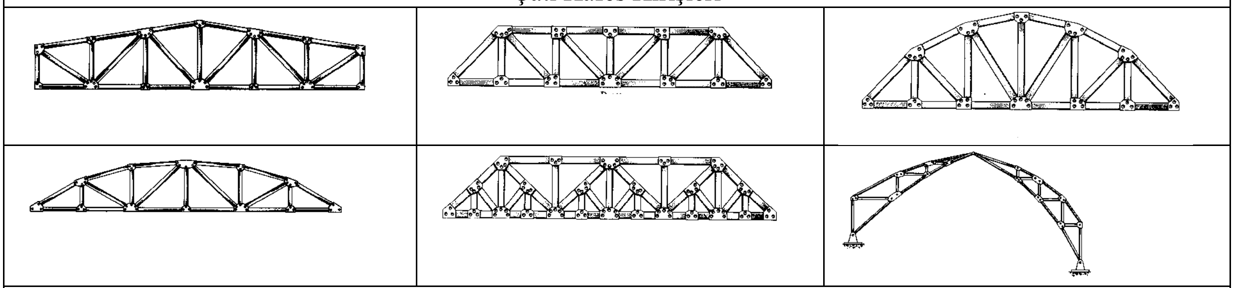


Şekil 8.1

Genel olarak, bir kafes sistemin elemanları narindir ve eksenine dik doğrultudaki yükleri taşıyamaz; bundan dolayı bütün yükler, çubukların kendilerine değil, düğüm noktalarına uygulanmalıdır. İki düğüm noktası arasına bir yayıllı yük uygulananacağı zaman bu yükler komşu düğümlere paylaştırılacak şekilde kafes sistemi dizayn edilir.



Çatı Kafes Kirişleri



Köprü Kafes Kirişleri

Şekil 8.2

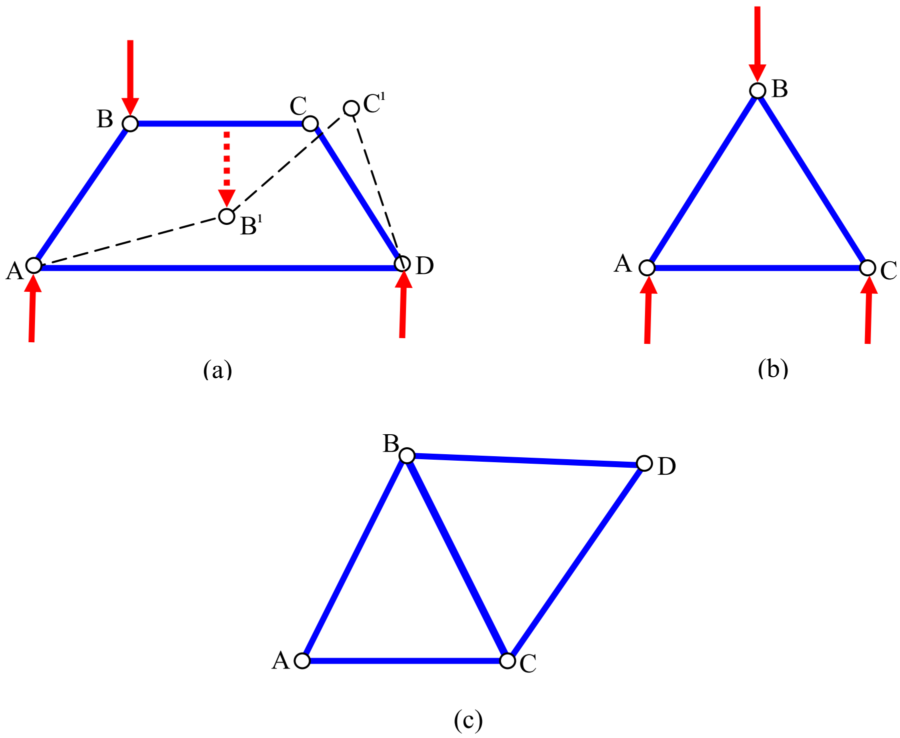
Kafes sistemi, çubuklarının ağırlıklarını da çubuğun birleştirdiği iki düğüm noktasına paylaştırılır. Çubuklar perçin yada kaynak ile birleştirilirler. Birleşme yerleri sürtünmesiz mafsallı birleştirme olarak kabul edilir. Bunun için bir çubuğun her iki ucuna etkiyen kuvvetler eksenel doğrultuda etkir, moment meydana gelmez. Buna göre çubuk yalnız normal kuvvet etkisindeki bir eleman olarak ele alınabilir ve bütün kafes sistem bir mafsallar ve normal kuvvet etkisindeki elemanlar grubu olarak kabul edilebilir.

Şekil 8.2.1

8.2 BASİT KAFES SİSTEMLERİ

A, B, C ve D mafsalları ile birbirine bağlanmış dört çubuktan oluşan, Şekil 8.3(a)'deki kafes sistemi göz önüne alalım. B noktasına herhangi bir yük uygulanırsa, kafes sistem büyük ölçüde şekil değiştirir ve ilk biçimini tamamen kaybeder. Diğer taraftan *A, B, C* mafsalları ile birbirlerine bağlanmış üç çubuktan oluşan Şekil 8.3(b) deki kafes sistem, B noktasında uygulanan bir yükten dolayı çok az şekil değiştirir. Bu kafes sistem için tek mümkün deformasyon, elemanlarının küçük boy değişimlerinden ibarettir. Şekil 8.3(b) deki kafes sistem bir rijit kafes sistem olarak anılır; burada rijit deyimi kafes sistemin göçmiyeceğini belirtmek üzere kullanılmıştır.

Şekil 8.3(b) deki baz üçgen kafes sisteme, BD ve CD gibi iki çubuk eklenerek Şekil 8.3(c)'de gösterildiği gibi, daha büyük bir rijit kafes sistem elde edilebilir. Bu işlem istenildiği kadar çok kere tekrarlanabilir, yeni iki çubuk eklemek, bunları mevcut iki ayrı düğüm noktasına bağlamak ve yeni bir düğüm noktasında birleştirmek şartı ile sonuç kafes sistem rijit olur.



Şekil 8.3

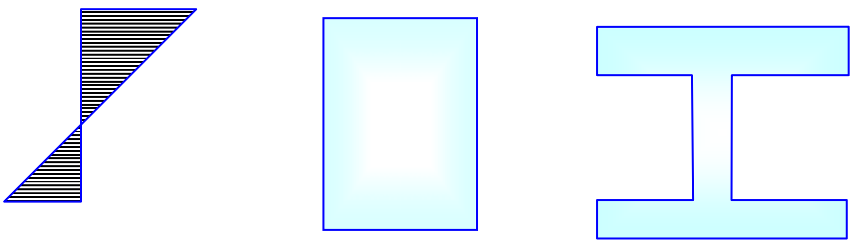
8.3 İZOSTATİK VE HİPERSTATİK SİSTEMLER

Bir katı cisme tesir eden düzlem kuvvetlerde denge şartları, birbirine bağlı olmayan üç denklem verir. Bilinmeyen sayısı bunlardan fazla olursa, denge şartları problemin çözümüne kâfi gelmez. Bu tip problemlere **"statik bakımdan belirsiz"** veya **"hiperstatik"** problemler denir.

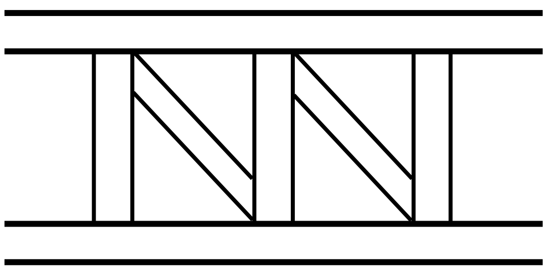
Bilinmeyen sayısı denklem sayısından ne kadar fazla ise belirsizlik o derece yüksek olur. Belirli olan sistemlere **"izostatik"** sistemler denir.

8.4 KAFES SİSTEMLER İÇİN GENEL BİLGİLER

Taşıyıcı sistemlerin açıklıkları büyüdükçe dolu gövdeli sistemlerin, kendi ağırlıklarının artışından dolayısıyla ekonomik olmadığından yerlerini kafes ve çerçeve sistemlerine bırakırlar.



(a) (b) (c)



(d)

Şekil 8.4. Profil ve Bağlantılar

Şekil 8.4 (a)' da dolu bir çubuğun herhangi bir kesitinde basit eğilme halinde gerilme yayılışı görülmektedir. Burada orta kısımdaki liflerin üst ve alt kenarlardaki liflere nazaran kesit taşıyıcılığına daha az iştirak ettikleri görülmektedir. Çubuğun kendi ağırlığını azaltmak için orta bölgenin bir kısmı sistemden çıkartılarak I kesitli dolu sistemler elde edilir.

Şekil 8.4(b)’de ve Şekil 8.4(c)'de daha büyük açıklıklarda ise orta kısım tamamıyla kaldırılıp bunun yerine kesme kuvvetini karşılamak üzere Şekil 8.4(d)'deki gibi çubuklar konarak çerçeve veya kafes sistemler elde edilir.

Kafes sistemler, yalnız normal kuvvetleri taşıyan doğru eksenli çubukların birleştirilmesinden meydana gelirler. Çubuklar sürtünmesiz bir mafsal ile birbirlerine bağlıdırlar. Buralara **"düğüm noktaları"** denir. Mafsallarla yapılmış sistemler ancak düğüm noktalarında yük taşırlar. Aksi halde tatbik edilen yüklerin momenti doğar ki, bunu da sürtünmesiz mafsallar taşıyamaz.

8.5 KAFES SİSTEMLERİNİN İZOSTATİK OLMA ŞARTI

Kafes sisteminin çubuklarında eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri sıfırdır. Yalnız normal kuvvetler vardır. Bunlara **"çubuk kuvvetleri"** denir. Kafes sistemde;

d = Düğüm noktası sayısını (mesnetler dahil)

r = Mesnet reaksiyonları sayısını

ç = Çubuk sayısını

göstersin. Her çubukta, bilinmeyen olarak bir çubuk kuvveti vardır. O halde reaksiyonlar ile birlikte bilinmeyenlerin toplam sayısı (r+ç) olur.

8.6 ÇUBUK KUVVETLERİNİN TAYİNİ

Kafese teşkil eden çubukların boyutları, her çubuğa gelen kuvvet ve zorlamaya göre hesaplanır. Bu hesaplamalarda iki esas kabul edilmektedir.

1. Çubukların birbirleriyle olan bağlanışı, sürtünmesiz mafsallı farzedilir. İki veya daha fazla çubuğun bir arada bağlandığı bu mafsala düğüm noktası denir. Mafsalların sürtünmesiz olduğunu kabul etmek, düğüm noktalarının moment taşımayacakları peşinen kabul edilir.

2. Kirişe gelen bütün dış kuvvetlerin düğüm noktalarında tesir ettiği yani çubuğun iki düğüm noktası arasındaki kısmına hiç bir dış kuvvetin tesir etmediği farzedilir.

Hesap:

m = 3 + 2 (j - 3)

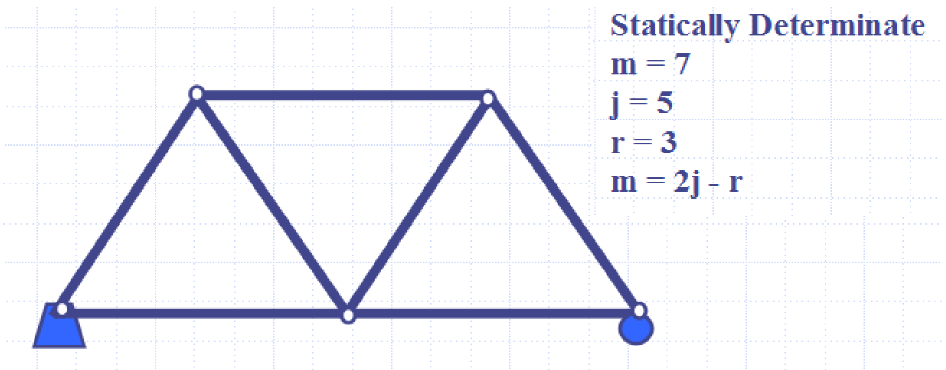
m=çubuk sayısı
j=bağlantı noktası sayısı
r=reaksiyon kuvveti sayısı

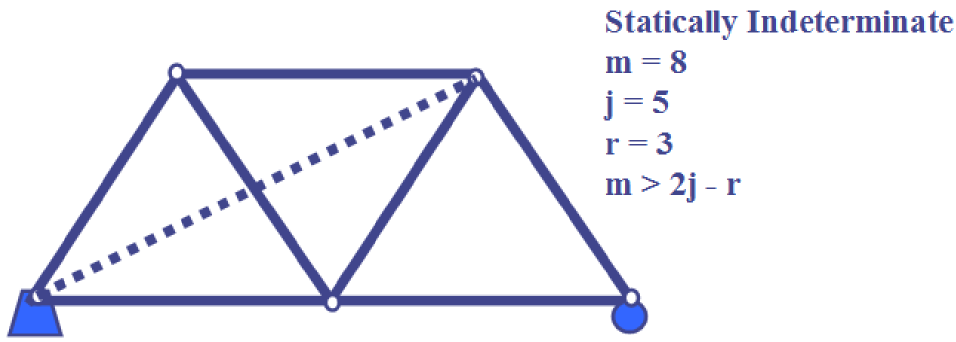
İzostatiklik şartı:

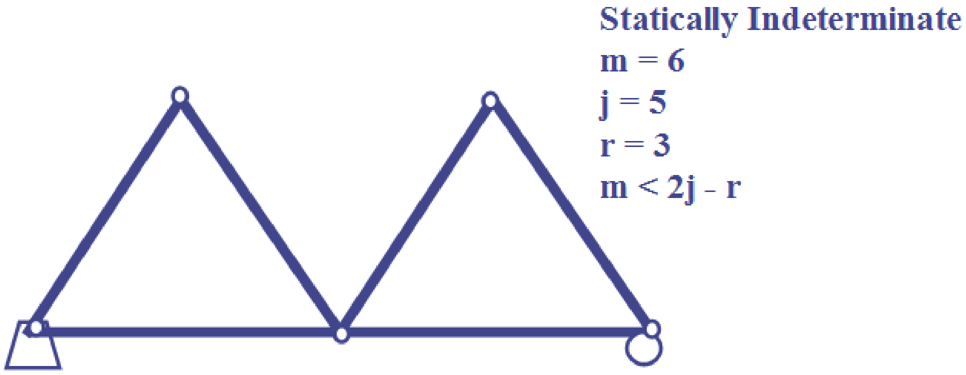
$m < 2j - r$ *Stabil değil*

$m = 2j - r$ *Statikle çözülebilir*

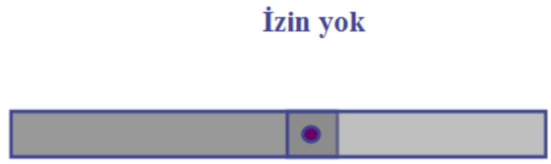
$m > 2j - r$ *Statik olarak tanımsız*

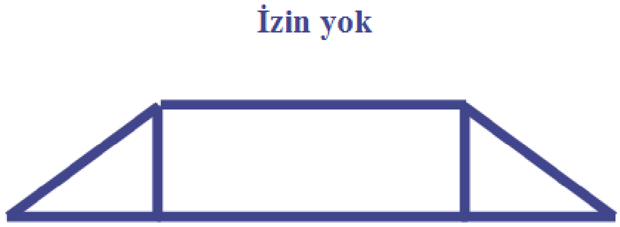


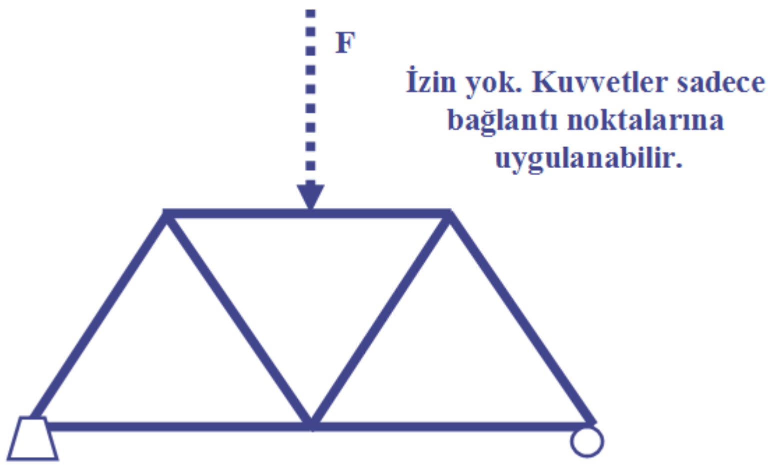


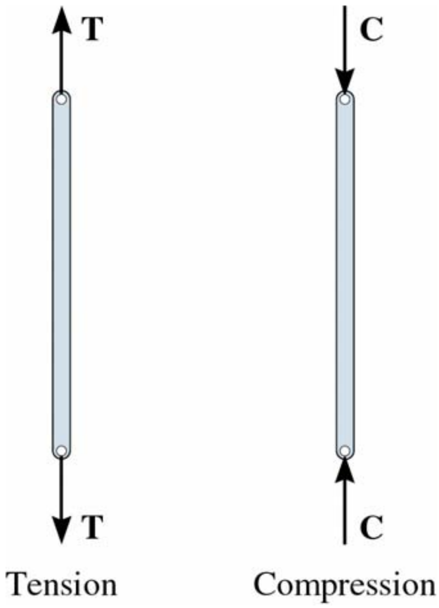


Bu sunumun hazırlanılmasında yararlanılan kaynak: **Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics,9e, Prentice Hall**









4.1.1. Kafeslerin Analizi

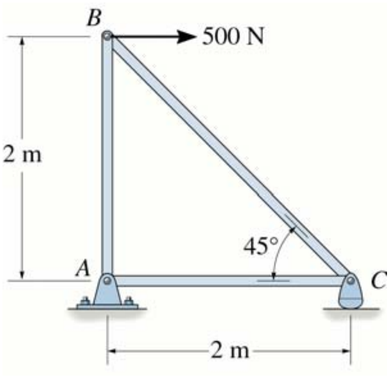
1. Dış denge
Reaksiyon kuvvetleri bulunur.

2. İç denge
Herbir çubuktaki kuvvetler bulunur.
-Düğüm Yöntemi
-Kesme Yöntemi

4.1.1.1 Düğüm Yöntemi

- Düğüm dengesi göz önüne alınır.
- Düğümün SCD'ı çizilir
- Kiriş elemanları çift kuvvet elemanlarıdır. Düğümün SCD'ı eş noktasal kuvvetlerdir.
- İki denge denklemi mevcuttur.($\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$)

Örnek Problem 4.1.



Her bir çubuktaki kuvvetleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

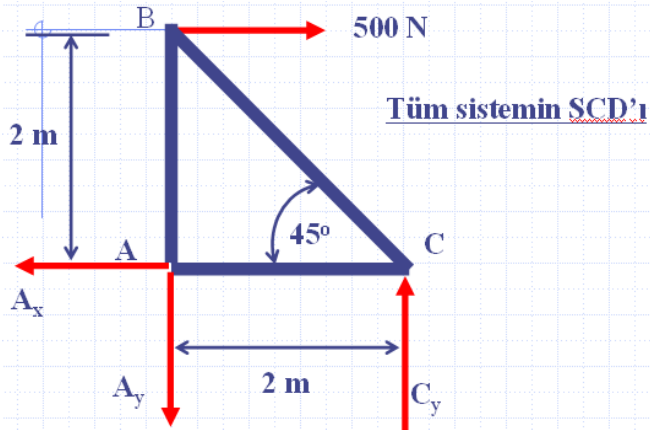
$$500 - A_x = 0 \qquad C_y - A_y = 0$$

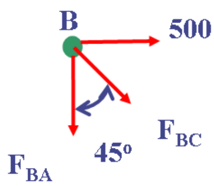
$$A_x = 500 \ \text{N} \qquad A_y = C_y$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-500(2) + C_y(2) = 0$$

$$A_y = C_y = 500 \ \text{N}$$





F_{BC} nin çeki olduğunu farzedelim.

$$\sum F_x = 0$$

$$500 + F_{BC} \ \sin \ 45^o = 0$$

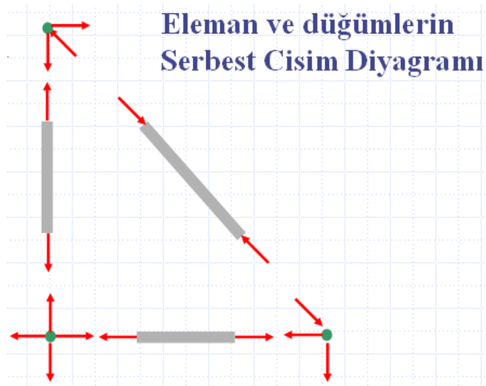
$$F_{BC} = -707.1 \ \text{N}$$

$$F_{BC} = 707.1 \ \text{N} \ (\text{C})$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{BC} \ \cos \ 45^o - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = 500 \ \text{N} \ (\text{T})$$



$$\sum F_x = 0$$

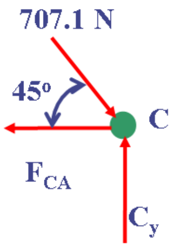
$$-F_{CA} + 707.1 \cos 45^o = 0$$

$$F_{CA} = 500 \ N \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$C_y - 707.1 \sin 45^o = 0$$

$$C_y = 500 \ N$$



$$\sum F_x = 0$$

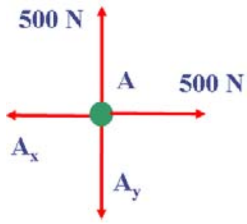
$$-A_x + 500 = 0$$

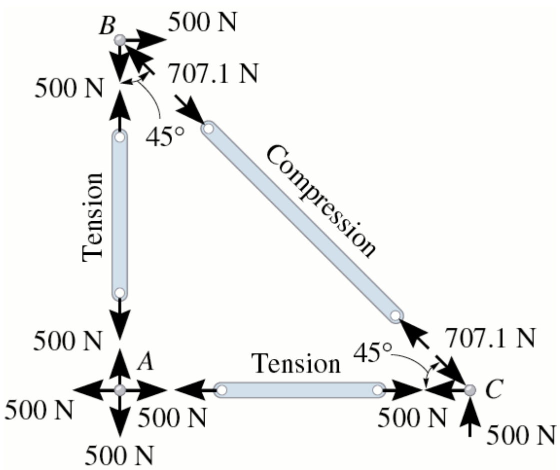
$$A_x = 500 \ N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-A_y + 500 = 0$$

$$A_y = 500 \ N$$



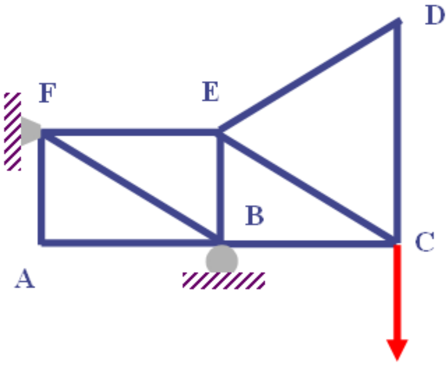


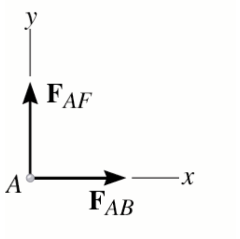
Bu sunumun hazırlanılmasında yararlanılan kaynak: **Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics,9e, Prentice Hall**

Yüksüz çubuklar (sıfır kuvvet elemanları)

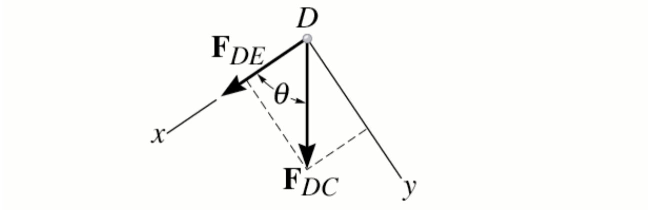
Kafes yapılarında bazı çubuklar yük taşımazlar. Bu yüksüz çubukların bulunma kuralları:

1. İki eleman birbirine bağlı ise ve bu bağlantı noktası yükün uygulandığı nokta veya mesnet noktası değilse, bu iki eleman yük taşımıyor demektir.

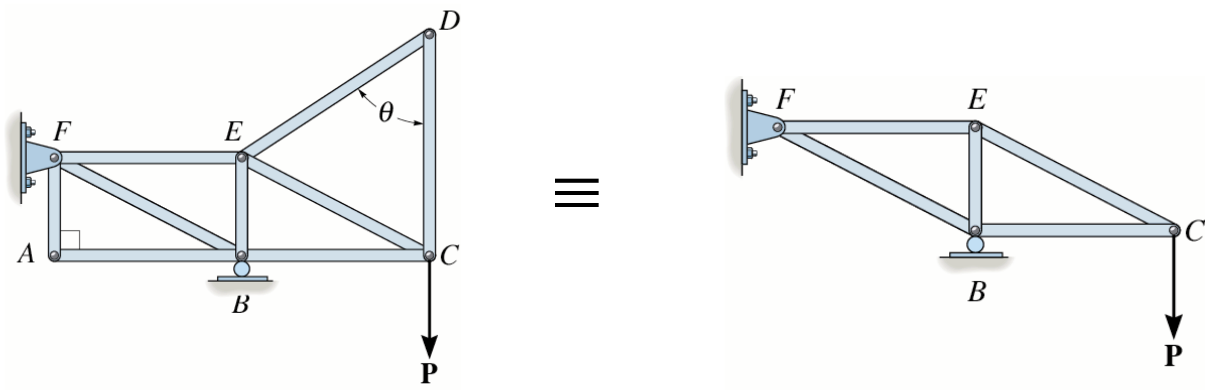




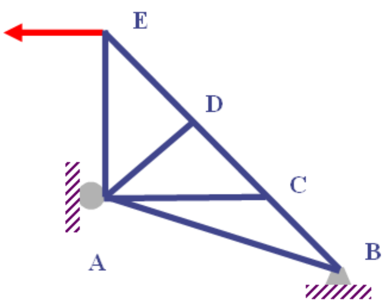
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\ F_{AB} = 0$
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ F_{AF} = 0$

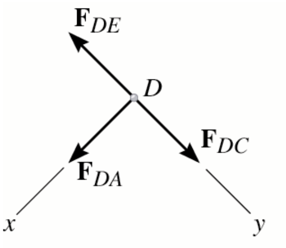


$+\searrow \Sigma F_y = 0;\ F_{DC} \sin\theta = 0;\ F_{DC} = 0 \text{ since } \sin\theta \neq 0$
$+\swarrow \Sigma F_x = 0;\ F_{DE} + 0 = 0;\ F_{DE} = 0$

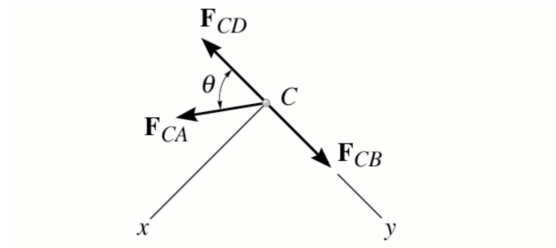


2. İkisi ortak çizgide olacak şekilde üç çubuğun bağlandığı düğüme dışarıdan yükleme yok ise ortak çizgide olmayan çubuk yüksüzdür.

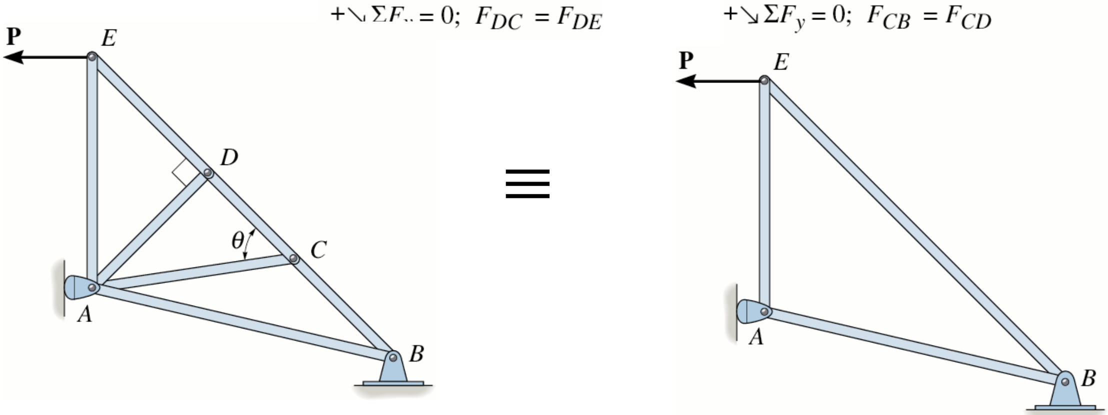




$+\swarrow \Sigma F_x = 0;\ F_{DA} = 0$
$+\searrow \Sigma F_y = 0;\ F_{DC} = F_{DE}$

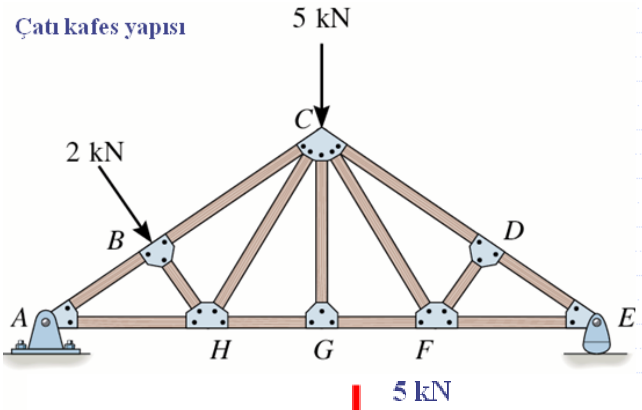


$+\swarrow \Sigma F_x = 0;\ F_{CA} \sin\theta = 0;\ F_{CA} = 0 \text{ since } \sin\theta \neq 0;$
$+\searrow \Sigma F_y = 0;\ F_{CB} = F_{CD}$

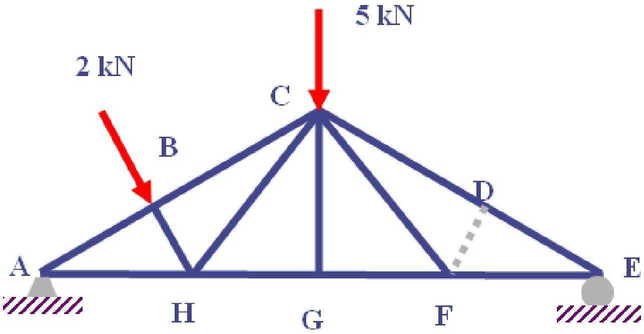


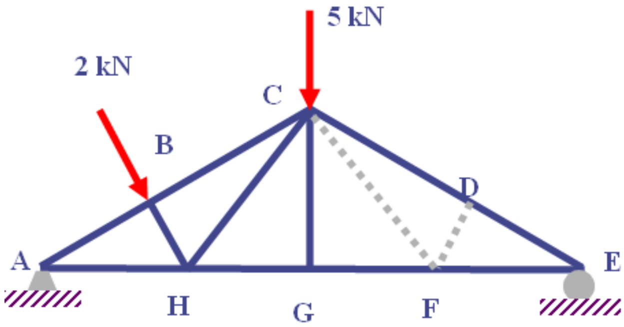
Bu sunumun hazırlanılmasında yararlanılan kaynak: **Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics,9e, Prentice Hall**

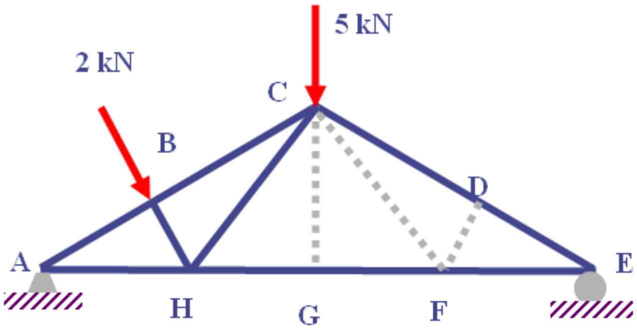
Örnek Problem 4.2



Yandaki çatı kafesteki boş çubukları bulalım.



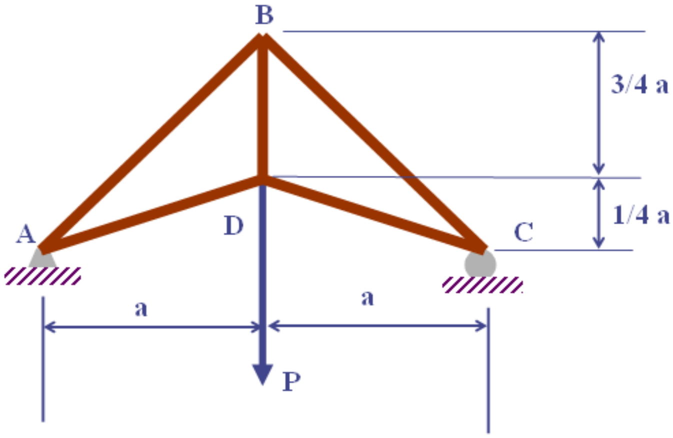




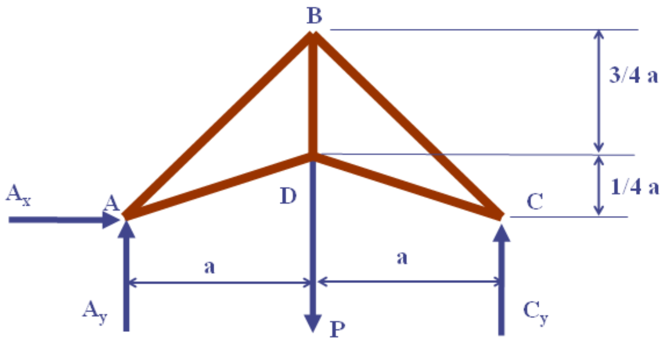
Düğüm yöntemi ile çözümlemede bazen bazı çubukların çekiye mi yoksa basıya mı çalıştığı ilk anda belirlenemeyebilir. Bu yüzden düğüm yöntemini uygulamada genel bir prosedürün ortaya konulması önem arz etmektedir. Düğüm yöntemi aşağıdaki sırada uygulanmalıdır.

1. Tüm kafesin Serbest Cisim Diyagramı çizilir ve mesnet tepkileri bulunur.
2. En az bir, en fazla iki bilinmeyecek olacak şekilde düğümlerin Serbest Cisim Diyagramları çizilir.
3. Düğümlerin SCD'nda bilinen kuvvetler kendi yönlerinde, bilinmeyen tüm kuvvetler düğümden dışarı olacak şekilde (çeki) yerleştirilir. Bilinmeyen kuvvette sonuç pozitifse çubuk çekidir ve negatifse çubuk basıdır.
4. 3. madde uygulanmayacaksa gözlem sonucu bilinmeyen kuvvetin yönü belirtilir. Bilinmeyen kuvvette sonuç pozitifse alınan yön doğrudur ve negatifse alınan yön terstir.

Örnek Problem 4.3.

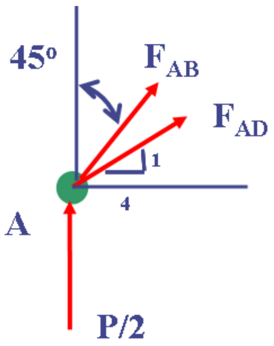


Yandaki kafeste her bir çubuktaki kuvvetlerin şiddetini ve çubukların basıya veya çekiye zorlandıklarını bulunuz.



ÇÖZÜM:

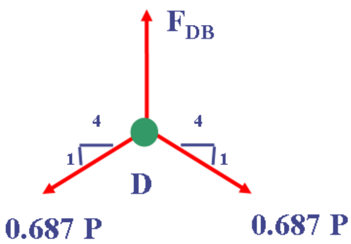
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - P = 0$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -Pa + C_y(2a) = 0$$
$$C_y = \frac{P}{2} \qquad A_y = \frac{P}{2}$$



$$\sum F_x = 0$$
$$\frac{4}{\sqrt{17}} F_{AD} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{AB} = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\frac{P}{2} + \frac{1}{\sqrt{17}} F_{AD} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{AB} = 0$$
$$F_{AD} = 0.687\ P \quad (T)$$
$$F_{AB} = 0.943\ P \quad (C)$$

Simetriden :

$$F_{CD} = 0.943\ P \quad (T)$$
$$F_{CB} = 0.943\ P \quad (C)$$



$$\sum F_y = 0$$
$$F_{DB} - \frac{1}{\sqrt{17}}(0.687\ P) - \frac{1}{\sqrt{17}}(0.687\ P) = 0$$
$$F_{DB} = 1.33\ P \quad (T)$$

Çubuklardaki kuvvetlerin yönleri

CD (T)
AD (T)
CB (C)
AB (C)
DB (T)

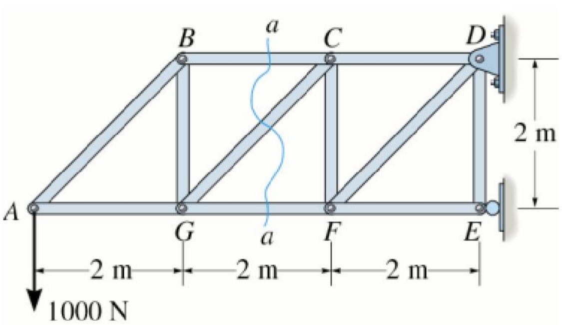
Bu sunumun hazırlanılmasında yararlanılan kaynak: **Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics,9e, Prentice Hall**

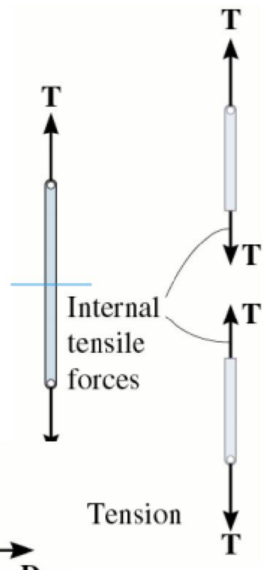
RİTTER YÖNTEMİ (KESİM YÖNTEMİ)

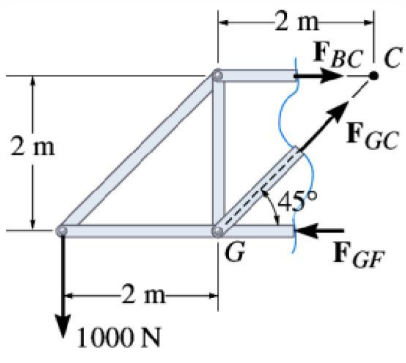
Düğüm metodu ve grafik metodun da, sadece üç denge denkleminden ikisinin avantajından istifade edilmiştir. Zira düğüm noktasında kesişen kuvvetler söz konusudur. Üçüncü denge denkleminin avantajını kullanmak için, kesilmiş bir kafesin bütünü serbest cisim olarak alınabilir. Bu durumda bir noktada kesişmeyen kuvvetlerin dengesi söz konusudur. Üçüncü denge denkleminin avantajı, hesabı istenen çubuğu içine alan bir kesim yaparak sistemi çözüp doğrudan doğruya istenen çubuğun hesabının yapılabilmesidir. Bu durumda hesabı istenen çubuğa gelmek için düğümden düğüme hesap yapmak gereksizdi. Bu durumda sadece üç tane bağımsız denge denklemi vardır. O halde sistemi keserken üç çubuktan fazla çubuk kesilmemelidir.

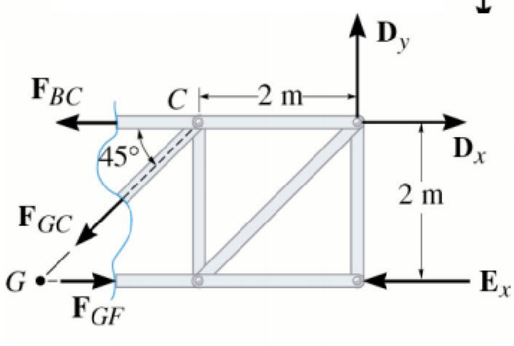
Kesme metodunda anlaşılması gereken esas nokta kesmeden sonra elde edilen bölümün tek bir cisim dengesinin inceleneceğidir. İç kısımdaki çubuklara ait çubuk kuvvetleri çözümde kullanılamaz. Serbest cisim ve dış kuvvetleri açık olarak belirtmek için kesme işlemi düğümden değil de, çubuklardan yapılır.

Kesme metodunda, moment denklemlerinin avantajından istifade edilir ve moment merkezi seçilirken, mümkün olduğu kadar fazla bilinmeyen kuvvetin bu noktadan geçmesine dikkat edilmelidir.

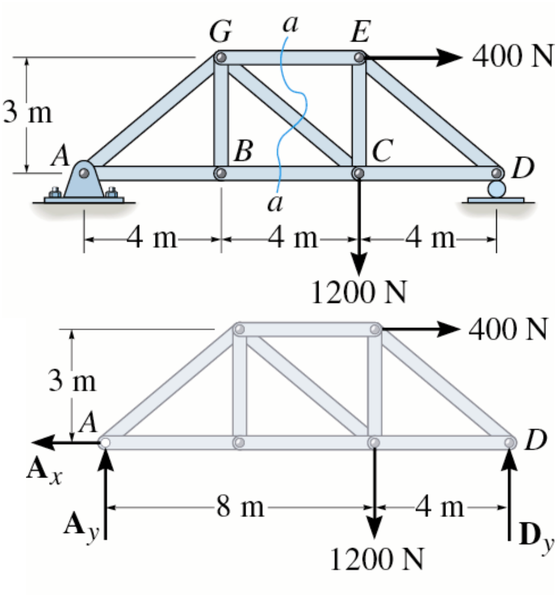








Örnek Problem 4.4



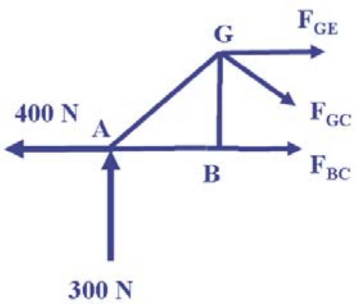
GE, GC ve BC çubuklarındaki kuvvetleri bulunuz.

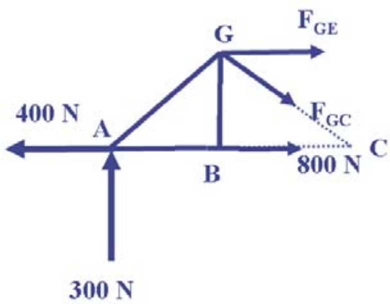
ÇÖZÜM:

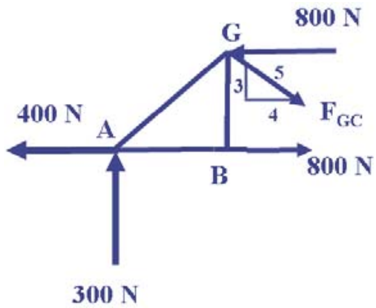
$$\sum F_x = 0$$
$$400 - A_x = 0$$
$$A_x = 400 \;\; \text{N}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$A_y + D_y - 1200 = 0$$

$$\sum M_A = 0$$
$$-1200(8) - 400(3) + D_y(12) = 0$$
$$D_y = 900 \;\; \text{N}$$
$$A_y = 300 \;\; \text{N}$$





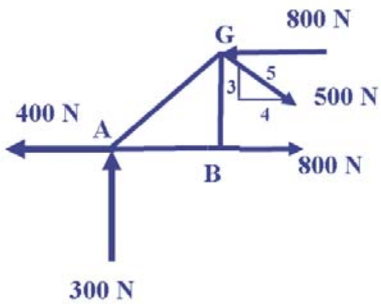


$$\sum M_G = 0$$
$$-300(4) - 400(3) + F_{BC}(3) = 0$$
$$F_{BC} = 800 \;\; \text{N} \;\; (\text{T})$$

$$\sum M_C = 0$$
$$-300(8) - F_{GE}(3) = 0$$
$$F_{GE} = -800 \;\; \text{N}$$
$$F_{GE} = 800 \;\; \text{N} \;\; (\text{C})$$

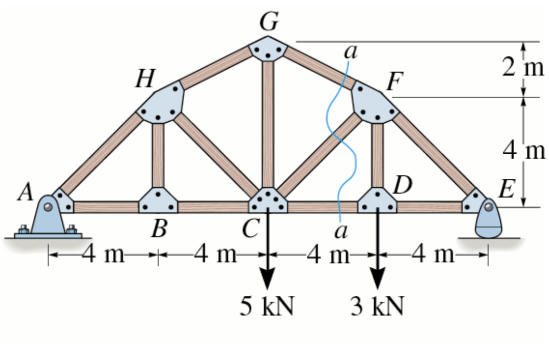
$$\sum F_y = 0$$
$$-300 - F_{GC}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$
$$F_{GC} = 500 \;\; \text{N} \;\; (\text{T})$$

CEVAP:



Bu sunumun hazırlanılmasında yararlanılan kaynak: **Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics,9e, Prentice Hall**

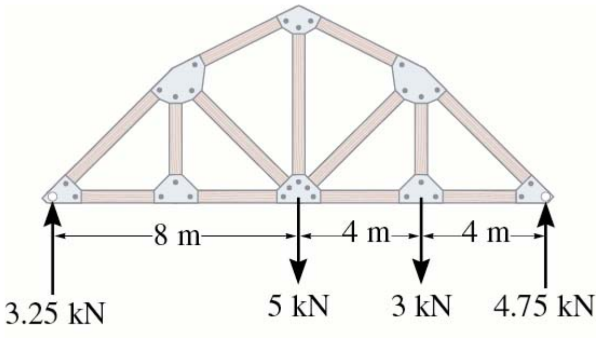
Örnek Problem 4.5

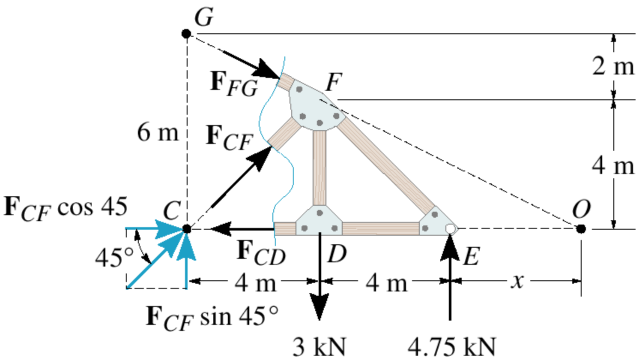


CF çubuğundaki kuvvetleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

Menet tepkileri:



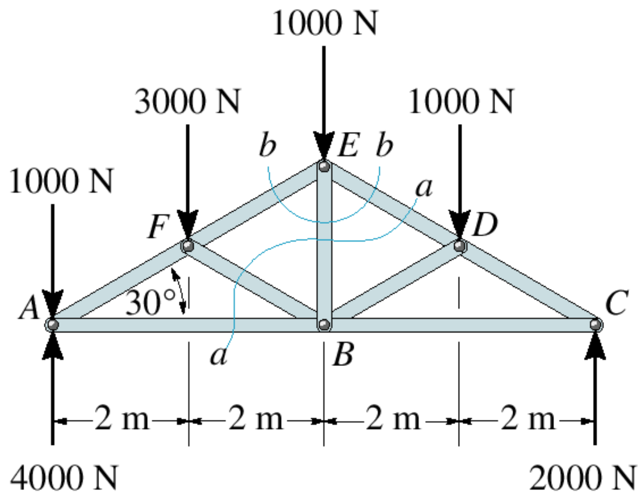


$$\sum M_O = 0$$

$$-F_{CF}\sin 45^{o}(12\text{m}) + (3\,\text{kN})(8\text{ m}) - (4.75\,\text{kN})(4\text{ m}) = 0$$

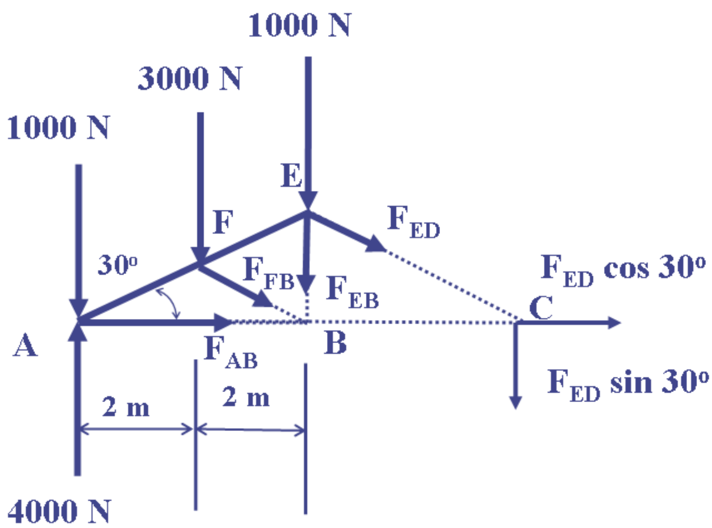
$$F_{CF} = 0.589\,\text{kN}(\text{C})$$

Örnek Problem 4.6

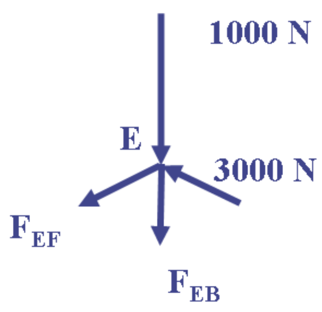


EB çubuğundaki kuvveti bulunuz.

ÇÖZÜM:
Bu problemi tek kesme ile yapamayız. Şekilde gösterildiği gibi iki kesme yapılması gerekir.

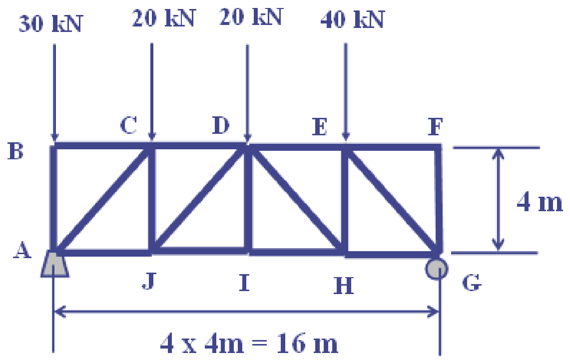


$$\sum M_B = 0$$
$$1000(4) + 3000(2) - 4000(4)$$
$$-F_{ED} \ \sin \ 30^o \ \ (4) = 0$$
$$F_{ED} = -3000 \ \ N$$
$$F_{ED} = 3000 \ \ N \ \ (C)$$

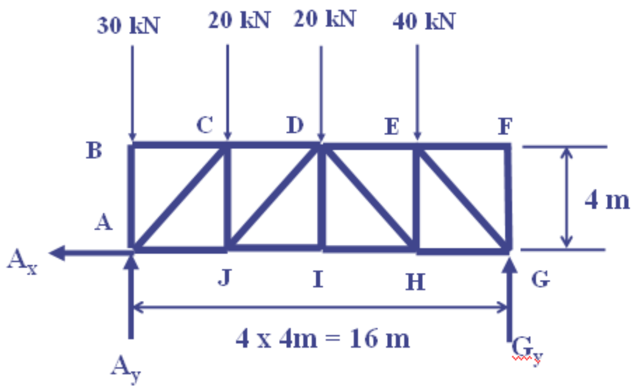


$$\sum F_x = 0$$
$$-F_{EF} \cos 30^o - 3000 \cos 30^o = 0$$
$$F_{EF} = -3000 \ \ N$$
$$F_{EF} = 3000 \ \ N \ \ (C)$$
$$\sum F_y = 0$$
$$-F_{EF} \sin 30^o - 3000 \sin 30^o - 1000 - F_{EB} = 0$$
$$F_{EB} = 2000 \ \ N \ \ (T)$$

Örnek Problem 4.7.



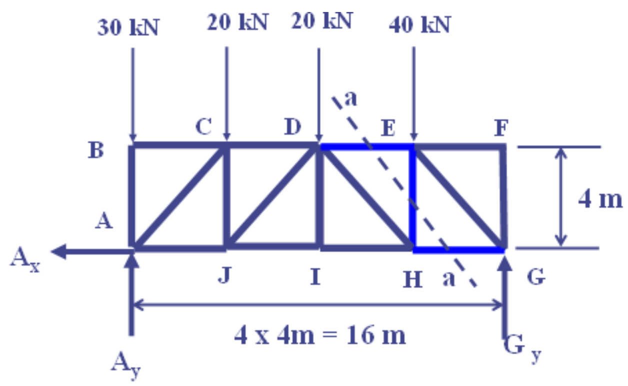
DE, EH ve HG çubuklarındaki kuvvetleri bulunuz.

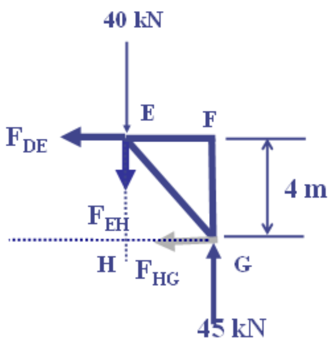


$$\sum F_x = 0$$
$$-A_x = 0$$
$$A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$
$$-20(4) - 20(8) - 40(12) + G_y(16) = 0$$
$$G_y = 45 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$A_y + G_y - 30 - 20 - 20 - 40 = 0$$
$$A_y = 65 \text{ kN}$$



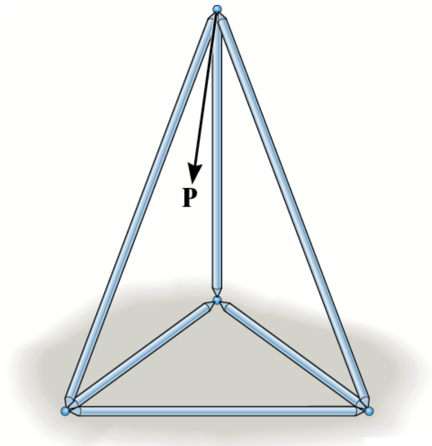


$$\sum M_H = 0$$
$$45(4) + F_{DE}(4) = 0$$
$$F_{DE} = -45 \; kN$$
$$F_{DE} = 45 \; kN \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0$$
$$45 - 40 - F_{EH} = 0$$
$$F_{EH} = 5 \; kN \quad (T)$$

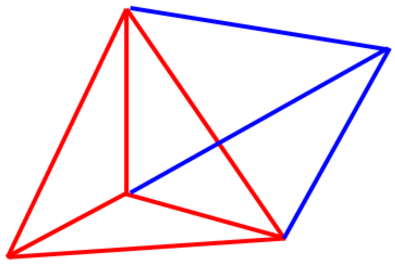
$$\sum F_x = 0$$
$$45 - F_{HG} = 0$$
$$F_{HG} = 45 \; kN \quad (T)$$

4.1.2 Uzay Kafesler:



Uzay kafeste temel eleman tetrahedrondur. Tetrahedronlarda 6 eleman ve 4 düğüm mevcuttur.

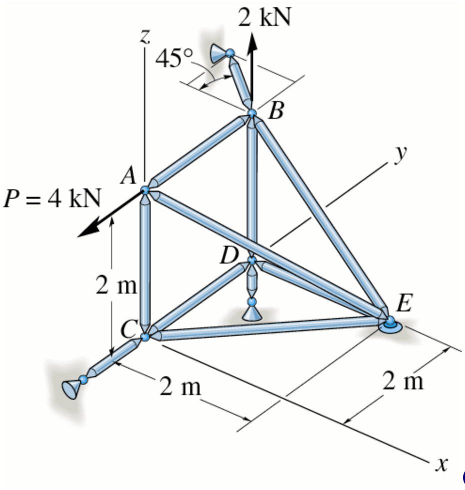
Kafesi genişletebilmek için üç eleman ve bir düğüm eklemek gerekir.



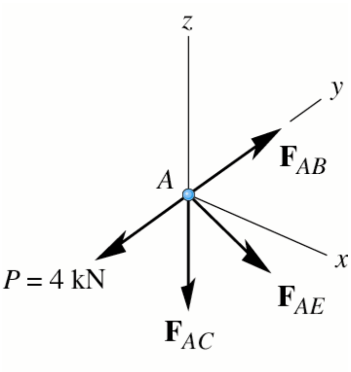
Düğüm yöntemi ile çözüm yapılabilir.

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

Örnek Problem 4.8:

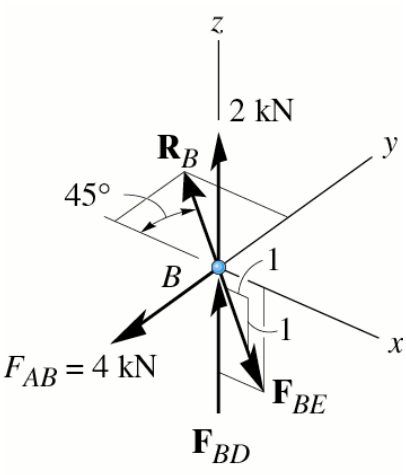


ÇÖZÜM:



$$P = -4j$$
$$F_{AB} = \mathrm{F_{AB}}\,j$$
$$F_{AC} = -\mathrm{F_{AC}}\,k$$
$$F_{AE} = \mathrm{F_{AE}}\left(\frac{r_{AE}}{|r_{AE}|}\right) = \mathrm{F_{AE}}\left(\frac{2i+2j-2k}{\sqrt{4+4+4}}\right)$$
$$F_{AE} = \mathrm{F_{AE}}\left(0.577i + 0.577j - 0.577k\right)$$

$$\sum F = P + F_{AB} + F_{AC} + F_{AE}$$
$$\sum F_x = 0.577\mathrm{F_{AE}} = 0$$
$$\sum F_y = -4 + \mathrm{F_{AB}} + 0.577\mathrm{F_{AE}} = 0$$
$$\sum F_z = -\mathrm{F_{AC}} - 0.577\mathrm{F_{AE}} = 0$$
$$\mathrm{F_{AC}} = \mathrm{F_{AE}} = 0$$
$$\mathrm{F_{AB}} = 4kN \quad (T)$$



$$\sum \mathbf{F_x} = -\mathbf{R_B}\cos 45^{\circ} + .7071\mathbf{F_{BE}} = 0$$
$$\sum \mathbf{F_y} = -4 + \mathbf{R_B}\sin 45^{\circ} = 0$$
$$\sum \mathbf{F_z} = 2 + \mathbf{F_{BD}} - +.7071\mathbf{F_{BE}} = 0$$
$$\mathbf{F_{BE}} = \mathbf{R_B} = \mathbf{5.66\,kN}$$
$$\mathbf{F_{BD}} = \mathbf{2\,kN}$$