

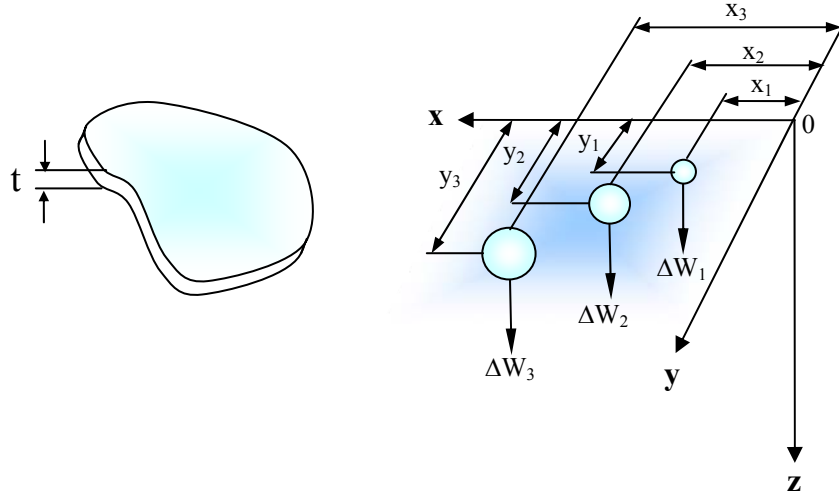
BÖLÜM 5

İKİ BOYUTLU CİSİMLERİN AĞIRLIK MERKEZLERİ

5.1 GİRİŞ VE TANIM

Ağırlık kuvvetlerinin bileşkelerine cismin ağırlığı, ve bu kuvvetlerinin bileşkesinin tatbik noktasına cismin ağırlık merkezi denir. Dünyanın katı bir cisme tatbik ettiği yer çekim kuvvetleri dünyanın merkezine yöneliktir. Bu kuvvetleri çok büyük bir yaklaşıkla paralel kuvvetler olarak ele alınabilir. Mühendislikte bir cisme uygulanan ağırlık kuvvetlerinin veya bazı sebeplerle tatbik edilen kuvvetlerin bileşkesinin tatbik noktalarının bilinmesi gerekmektedir.

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$



Şekil 5.1 Ağırlık kuvvetleri

Ağırlık kuvvetlerinin bileşkesinin tatbik noktası, bu kuvvetlerinin eksenlere göre momentlerini, bileşkenin momentine eşitleyerek bulunur. Böylece $\Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$ gibi n tane paralel kuvvetin yerine eşleniği konulmuş olur. Kuvvetler z eksenine paralel oldukları için bu eksene göre momentleri yoktur.

$$xW = x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + \dots + x_n\Delta W_n \quad xW = \sum_{i=1}^n x_i\Delta W_i \quad x = \frac{1}{W} \int x.dW$$

$$yW = y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + \dots + y_n\Delta W_n \quad yW = \sum_{i=1}^n y_i\Delta W_i \quad y = \frac{1}{W} \int y.dW$$

Eğer iki boyutlu cisim düzgün kalınlıklı bir plak ise burada kalınlığın diğer boyutlardan çok küçük olma şartı vardır. Bu durumda ağırlık kuvveti $\Delta W = \gamma.t.\Delta A$ γ (özgül ağırlık), t (kalınlık), ΔA (alan), şeklinde ifade edilebilir.

Toplam ağırlık;

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \gamma \cdot t \cdot \Delta A_1 + \gamma \cdot t \cdot \Delta A_2 + \dots + \gamma \cdot t \cdot \Delta A_n = \gamma \cdot t \cdot (\Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n) = \gamma \cdot t \cdot A$$

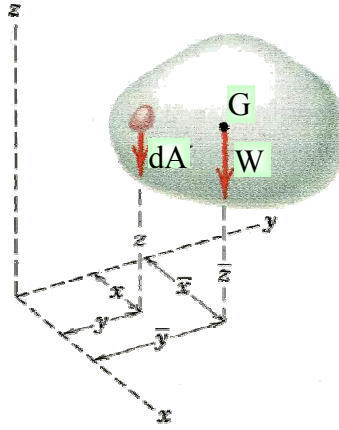
Eksnlere göre momentleri yazalım ;

$$x \cdot \gamma \cdot t \cdot \Delta A = \gamma \cdot t \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i = \gamma \cdot t \cdot (x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n)$$

$$x \cdot A = \sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n$$

Kütle Merkezi;

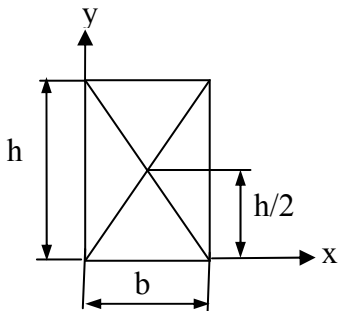
$$x = \frac{1}{A} \int x \cdot dA \quad \text{benzer şekilde} \quad y = \frac{1}{A} \int y \cdot dA$$



Şekil 5.2 Kütle merkezi

$$S_x = \int y \cdot dA \quad S_y = \int x \cdot dA$$

Burada $\int x \cdot dA$ 'ya alanın y eksenine göre statik momenti veya y eksenine göre birinci momenti denir. $\int y \cdot dA$ da alanın x eksenine göre statik momenti yada birinci momentidir.

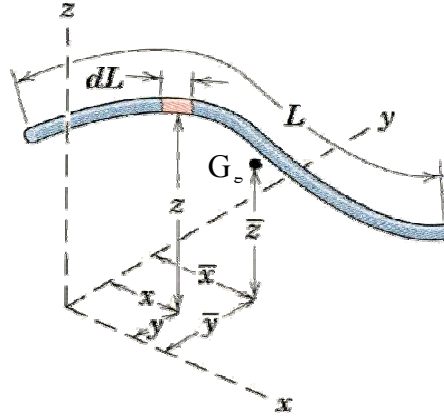


$$A = b \cdot h$$

$$x = \frac{b}{2} \quad y = \frac{h}{2}$$

Ağırlık merkezinin yeri; cisimde bir simetri ekseni varsa ağırlık merkezi bu eksen üzerindedir. Eğer iki simetri ekseni varsa simetri eksenlerinin kesim noktası ağırlık merkezidir.

Çubuğun Ağırlık Merkezi;



Şekil 5.3 Çubuğun ağırlık merkezi

$$\Delta W = \gamma \cdot a \cdot \Delta L$$

a = Telin kesit alanı

γ = özgül ağırlık

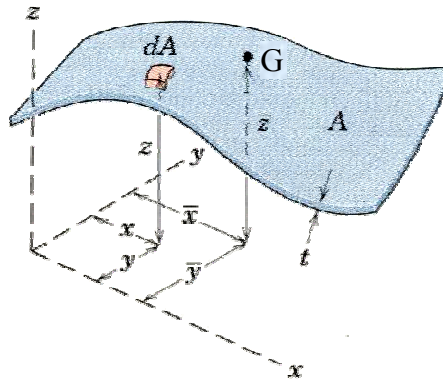
ΔL = Telin küçük parçasının boyu

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_n$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad x \cdot L = \sum_{i=1}^n x_i \Delta L_i \quad x = \frac{1}{L} \int x_i dL$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad y \cdot L = \sum_{i=1}^n y_i \Delta L_i \quad y = \frac{1}{L} \int y_i dL$$

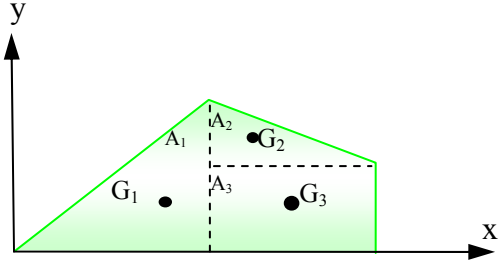
Alanın Ağırlık Merkezi;



Şekil 5.4 Alanın ağırlık merkezi

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

5.2 BİRLEŞİK ALANLARIN AĞIRLIK MERKEZİ



$$\begin{aligned} G_1 &= (x_1, y_1) \\ G_2 &= (x_2, y_2) \\ G_3 &= (x_3, y_3) \end{aligned}$$

Birleşik alan öncelikle kendisini meydana getiren geometrisi bilinen küçük alanlara ayrılır. Her bir alanın ağırlık kuvveti bu alanın ağırlık merkezinde bulunmasından hareketle tüm cismin ağırlık merkezi bulunabilir.

$$W = W_1 + W_2 + W_3,$$

$$\bar{x} \cdot W = x_1 \cdot W_1 + x_2 \cdot W_2 + x_3 \cdot W_3$$

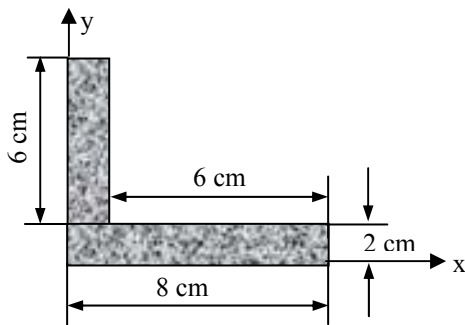
$$\bar{y} \cdot W = y_1 \cdot W_1 + y_2 \cdot W_2 + y_3 \cdot W_3$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\bar{x}A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Örnek 5.1



Ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

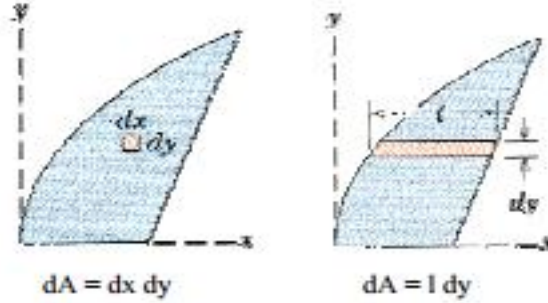
$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A} = \frac{1 \cdot (12) + 4 \cdot (16)}{28} = \frac{76}{28} = 2,71 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{5 \cdot (12) + 1 \cdot (16)}{28} = \frac{76}{28} = 2,71 \text{ cm}$$

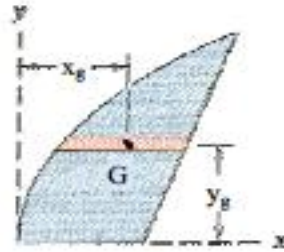
AĞIRLIK MERKEZİNİN İNTEGRASYONLA BULUNMASI

Mühendislikte analitik olmayan eğrilerle çevrili yüzeylerin ağırlık merkezleri, kendisini oluşturan küçük üçgen, dikdörtgen, kare...vb. elemanlara ayrılarak bunların alanlarının toplamlarından hareketle yüzeyin ağırlık merkezi yaklaşık olarak bulunabilir. Eğer yüzeyi çevreleyen eğriler analitik reel fonksiyon ise yüzeyin ağırlık merkezi integralle bulunabilir. Yüzey üzerindeki diferansiyel mertebedeki alan elemanı: $dA = dx \cdot dy$ alınarak buradan çift katlı integralle ağırlık merkezinin koordinatları bulunabilir. Mühendisliğe daha uygun bir çözüm ise diferansiyel mertebede ince dikdörtgen kesitler tek katlı integralle alanlar ve ağırlık merkezleri bulunabilir.

Eğri altında kalan alanın hesaplanması;



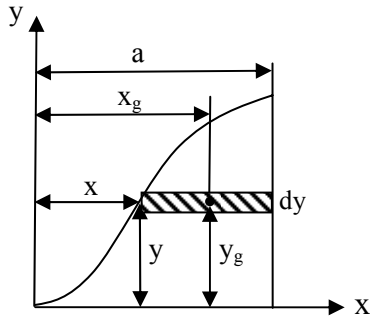
Taralı alanın ağırlık merkezinin integral ifadesi;



$$\bar{x} = \frac{\int x_g \, dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_g \, dA}{A}$$

Örnek 5.3

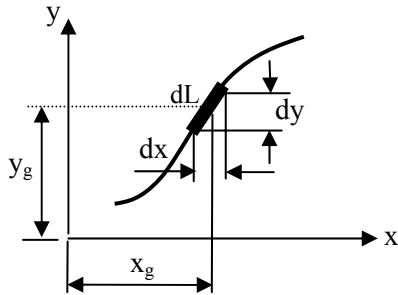


$$dA = (a - x) dy \quad x.A = \int x_g dA$$

$$x_g = \frac{a - x}{2} + x = \frac{a + x}{2} \quad y.A = \int y_g dA$$

$$y_g = y$$

Örnek 5.4



$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad dx \text{ parantezine alarak}$$

$$x_g = x$$

$$dL = \sqrt{1 + y'^2} . dx$$

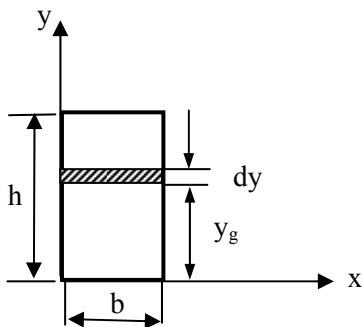
$$y_g = y$$

$$x.L = \int x.dL, \quad L = \int dL$$

$$y.L = \int y.dL$$

Örnek 5.5

Dikdörtgenin ağırlık merkezini integral yardımıyla bulunması,



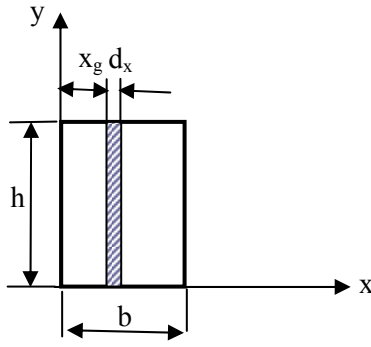
$$y.A = \int y_g . dA$$

$$y.b.h = \frac{b.h^2}{2}$$

$$y.b.h = \int y.b.dy$$

$$y = \frac{h}{2}$$

$$y.b.h = b. \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^h$$



$$x.b.h = \int_0^b x.dA$$

$$dA = h.dx$$

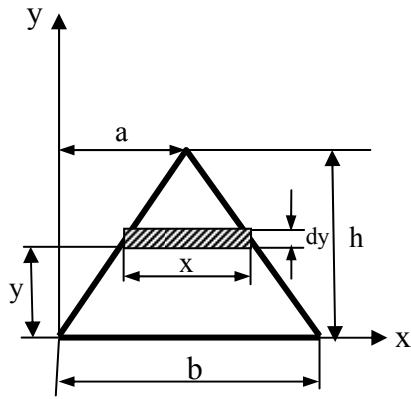
$$x.b.h = \int_0^b x.h..dx$$

$$x.b.h = h.\frac{x^2}{2}\bigg|_0^b$$

$$x = \frac{b}{2}$$

Örnek 5.6

Üçgenin ağırlık merkezini integral yardımıyla bulunması,



$$dA = x.dy$$

$$y.A = \int y.dA$$

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$y.\frac{b.h}{2} = \int y.xdy$$

$$x = \frac{b.(h-y)}{h}$$

$$y.\frac{b.h}{2} = \int_0^h y.\frac{b}{h}(h-y).dy$$

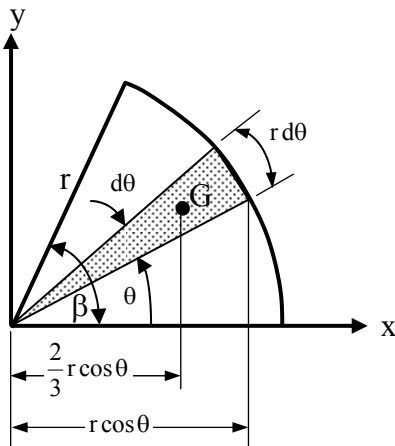
$$y.\frac{b.h}{2} = \frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2).dy$$

$$y = \frac{h}{3}$$

Örnek 5.7

Çeyrek dairenin ağırlık merkezini integral yardımıyla bulunması,

Çeyrek daire için β açısı 0° ile 90° arasındadır.



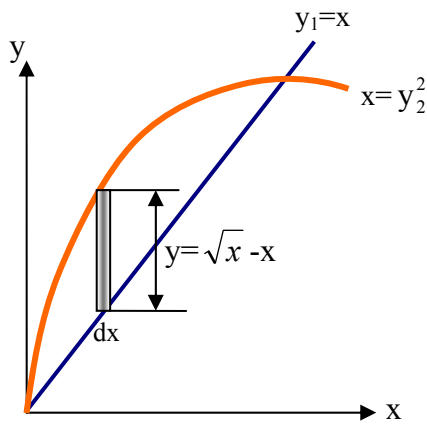
$$dA = \frac{1}{2}(r d\theta)(r) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$A = \int dA = \int_0^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}r^2 [\theta]_0^\beta = \frac{1}{2}r^2 [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} A &= \int x_g dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3} r \cos \theta \right) \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r^3 \cos \theta d\theta \\
&= \frac{r^3}{3} \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{3} \left[\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{r^3}{3} \\
\bar{x} &= \left(\frac{r^3}{3} \right) \left(\frac{4}{\pi r^2} \right) = \frac{4r}{3\pi}
\end{aligned}$$

İki eğri arasında kalan alanın ve ağırlık merkezinin hesabı;



$$dA = y dx = (\sqrt{x} - x) dx$$

$$y_1 = y_2$$

$$x = \sqrt{x}$$

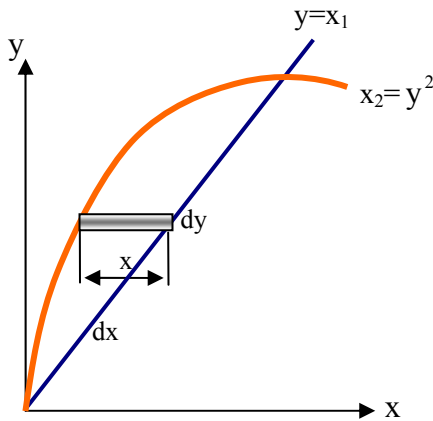
$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0$$

$$A\bar{x} = \int x dA$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x) dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx} = \frac{\int_0^1 x(x^{\frac{1}{2}} - x) dx}{\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x) dx} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$



$$dA = x dy = (y - y^2) dy$$

$$x_1 = x_2$$

$$y = y^2$$

$$y(y-1) = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = 0$$

$$A\bar{y} = \int y dA$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 y(y-y^2) dy}{\int_0^1 (y-y^2) dx} = \frac{\int_0^1 (y^2 - y^3) dy}{\int_0^1 (y-y^2) dy} = \frac{1}{2}$$

5.5 DÖNEL CİSİMLER (PAPPUS GULDİN TEOREMLERİ)

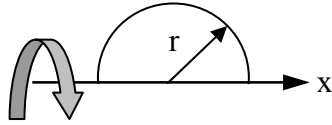
Teorem.1: Bir düzlem eğrinin kendi düzlemi içinde fakat kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı eğrinin uzunluğuyla dönme sırasında ağırlık merkezinin kat ettiği yolun çarpımına eşittir.

$$A = 2\pi y_g L$$

$$dA = 2\pi y_g dL$$

$$A = 2\pi \int y_g dL$$

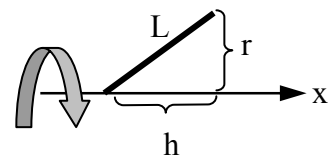
Örnek 5.8 Yarım çember yayından küre yüzey alanının elde edilmesi



$$A = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \cdot \pi r$$

$$A = \frac{8}{3} \pi r^2$$

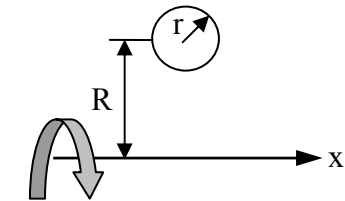
Örnek 5.9 Eğik bir doğrunun x eksenini etrafında döndürülmesi ile koni yüzey alanının hesabı



$$A = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot L \quad (\text{koni})$$

$$A = \pi \cdot r \cdot L$$

Örnek 5.10 Çemberden tor yüzey alanının hesabı

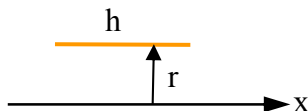


$$A = 2\pi \cdot 2\pi \cdot R \quad (\text{tor})$$

$$A = 4\pi^2 \cdot r \cdot R$$

Örnek 5.11 X eksenine paralel bir doğrudan silindir yüzey alanının elde edilmesi

$$A = 2\pi \cdot r \cdot h \quad (\text{silindir})$$

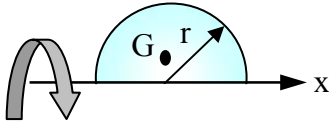


Teorem 2: Düzlem bir yüzeyin kendi düzlemi içinde, fakat kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, yüzeyin alanıyla dönme sırasında yüzeyin ağırlık merkezinin kat ettiği yolun çarpımına eşittir.

$$V = 2\pi y_g A$$

$$dV = 2\pi y_g dA \quad V = 2\pi \int y_g dA$$

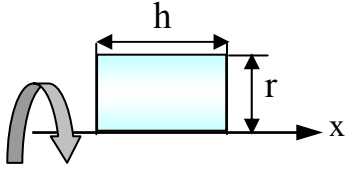
Örnek 5.12 Yarım daireden kürenin hacminin hesabı



$$V = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} \quad (\text{küre})$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

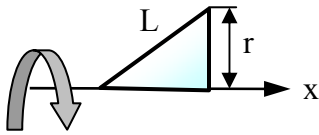
Örnek 5.13 Dikdörtgenden dolu silindirin hacminin hesabı



$$V = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot h \cdot r$$

$$V = \pi r^2 h$$

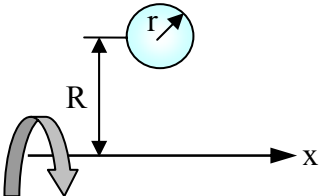
Örnek 5.14 Üçgenden koni hacminin hesabı



$$V = 2\pi \frac{r}{3} \cdot \frac{r \cdot h}{2}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Örnek 5.15 Dolu daireden R yarıçaplı torun hacminin hesaplanması

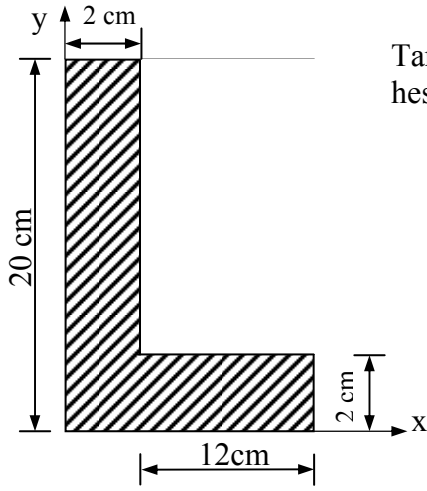


$$V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2$$

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

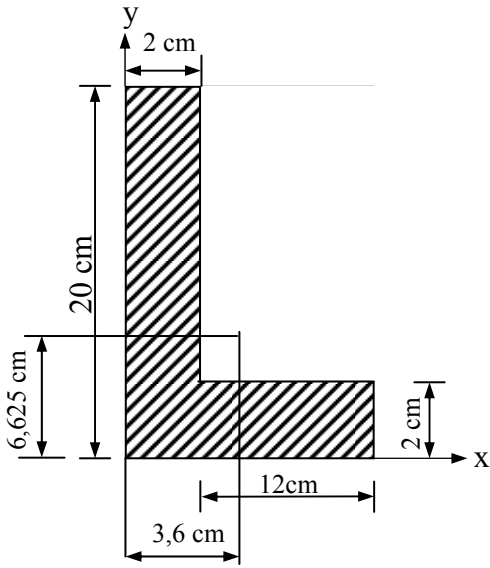
5.5 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

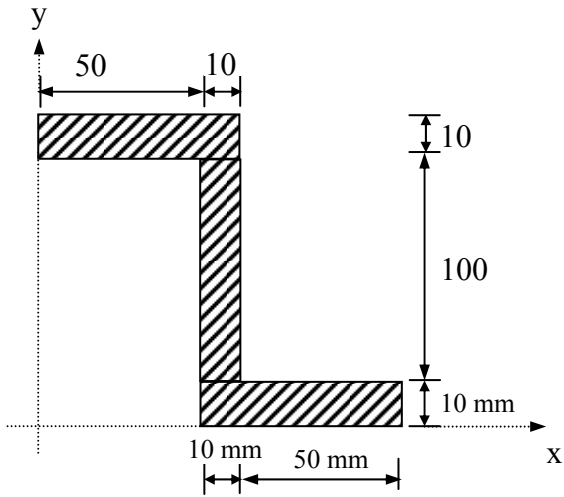
Çözüm:



$$\bar{X} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 1 + 24 \cdot 8}{64} = 3,625 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 10 + 24 \cdot 1}{64} = 6,625 \text{ cm}$$

Problem 2)



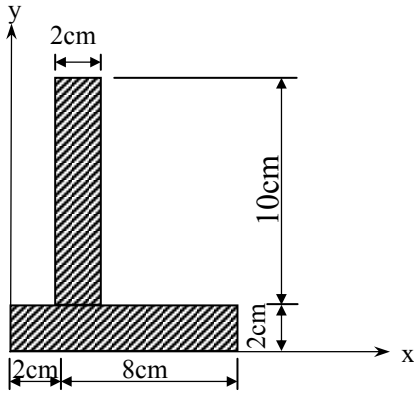
Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\bar{X} = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{30 \cdot (60 \cdot 10) + 55 \cdot (10 \cdot 100) + 80 \cdot (10 \cdot 60)}{600 + 1000 + 600} = 55 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{115 \cdot (60 \cdot 10) + 60 \cdot (10 \cdot 100) + 5 \cdot (10 \cdot 60)}{600 + 1000 + 600} = 60 \text{ mm}$$

Problem 3)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

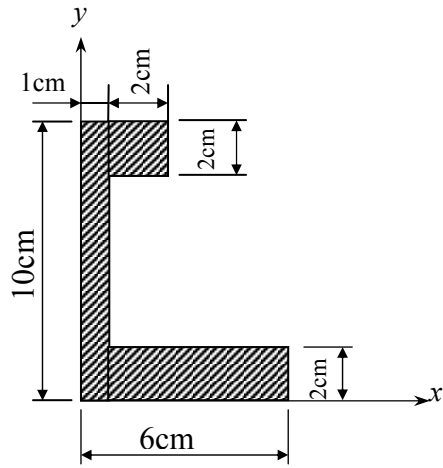
Çözüm:

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>A</i>	<i>Ax</i>	<i>Ay</i>
1	3	7	20	60	140
2	5	1	20	100	20
Toplam			40	160	160

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{160}{40} \Rightarrow \bar{x} = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{160}{40} \Rightarrow \bar{y} = 4 \text{ cm}$$

Problem 4)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

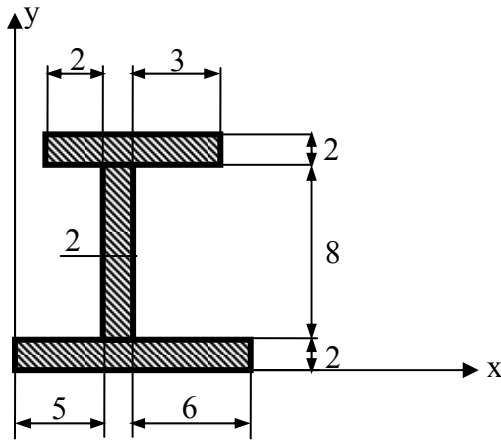
Çözüm:

	x	y	A	xA	yA
1	0,5	5	10	5	50
2	2	9	4	8	36
3	3,5	1	10	35	10
	<i>Toplam</i>		<u>24</u>	<u>48</u>	<u>96</u>
			ΣA	ΣxA	ΣyA

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{48}{24} = 2 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{96}{24} = 4 \text{ cm}$$

Problem 5)



Verilen profil kesitte ağırlık merkezini, yerini hesaplayınız. (ölçüler cm'dir)

Çözüm:

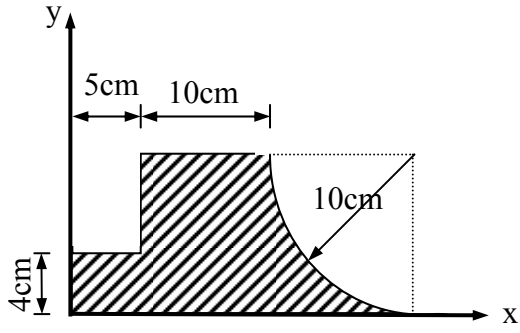
	<i>A</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>Ax</i>	<i>Ay</i>
1	14	6,5	11	91	154
2	16	6	6	96	96
3	26	6,5	1	169	26
	56			356	276

$$\bar{x} = \frac{356}{56} = 6,35 \text{ cm}$$

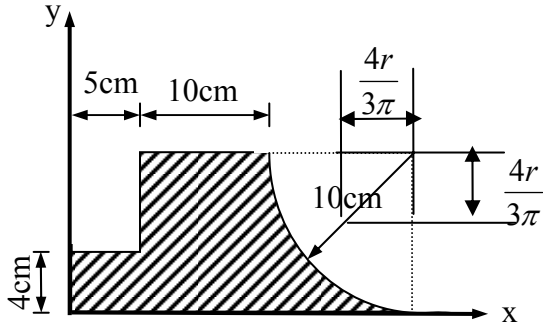
$$\bar{y} = \frac{276}{56} = 4,92 \text{ cm}$$

Problem 6)

Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



Çözüm:

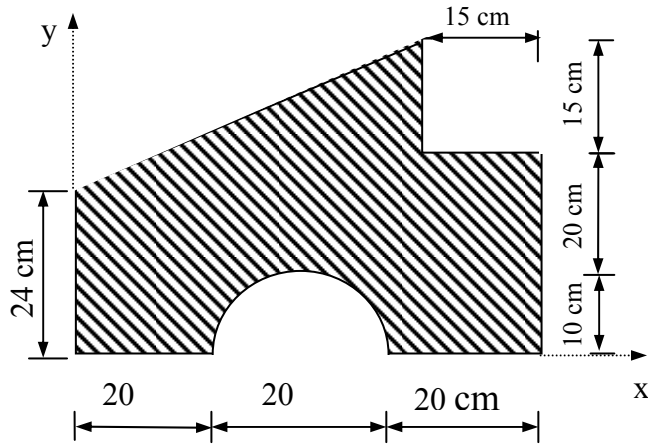


	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>X.A</i>	<i>Y.A</i>
1	12,5	5	250	3125	1250
2	2,5	7	-30	-75	-210
3	20,76	5,76	-78,53	-1630,28	-452,33
Toplam			141,47	1419,72	587,67

$$\bar{X} = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{1419,72}{141,47} = 10,03 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{587,67}{141,47} = 4,15 \text{ cm}$$

Problem 7)



Verilen şeklin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>X.A</i>	<i>Y.A</i>
<i>1</i>	30	22,5	2700	81000	60750
<i>2</i>	15	38	-472,5	-7087,5	-17955
<i>3</i>	52,5	37,5	-225	-11812,5	-8437,5
<i>4</i>	30	4,24	-157,08	-4712,4	-666
Toplam			1845,42	57387,6	33691,5

$$\bar{X} = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{57387,6}{1845,42} = 31,09 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{33691,5}{1845,42} = 18,25 \text{ cm}$$