

AKSLAR VE MİLLER

5.1 GENEL BİLGİLER

5.1.1 Tanımlar

Çeşitli fonksiyonu yerine getiren makinalarda dönme hareketi yapan, güç ileten parça veya elemanlar mevcuttur. Bu elemanların dönmelerine yardımcı olan, minimum güç kaybıyla moment veya enerji iletmelerini sağlayan yataklar da bulunur. Dönen parça veya elemanları taşıyan ve çeşitli elemanlar arasında enerji akışına da yardımcı olan ayrı bir eleman kullanılmalıdır. Bu elemana genel olarak **mil** ve bazı durumlarda da **aks** adı verilir.

Miller: Dişli çark, kayış kasnağı, zincir dişlisi, kavrama gövdesi veya göbeği, volan, rotor vb elemanları taşıyan genellikle dairesel kesitli olarak imal edilen ve taşıdıkları elemanlarla birlikte dönerek moment ve hareket ileten makine elemanlarıdır. Bu elemanlar, boyu çapına göre daha uzun olan kuvvet ve momentlerin iletilmesine yarayan, genellikle iki yerinden yataklanmış silindirik elemanlardır. Millerin üzerinde taşıdıkları makine parçalarının montaj ve bağlanmalarını kolaylaştırmak için, delikler, çevresel kanallar, kama yuvaları, konik geçme yüzeyleri, ani çap değişimleri, faturalar vb bulunabilir.

Bütün miller taşıdıkları elemanlarla (kütlelerle) birlikte döndükleri için bu elemanlardan gelen yükler statik olsa bile dinamik eğilme gerilmelerine maruzdur. Millerin güç veya moment iletirken maruz kalacakları burulma gerilmeleri genelde statik kabul edilmekle birlikte kısmen değişken olabilir. Genellikle miller ana zorlanma olarak burulmaya ve taşıyıcı olduklarından eğilmeye maruzdur. Buna ek olarak eksenel kuvvetler varsa çekme ve basmaya da maruz kalabilirler. Miller taşıdıkları elemanlarla birlikte dönen, titreşen, kayan veya genel ifadesiyle hareket eden elemanlar olduğu için makine gövdesine yataklanmaları gerekir.

Akslar: Bu elemanlar genel olarak, görünüşleri ve geometrik yapıları bakımından millere benzemekte olup sadece yük taşıyan ve bu nedenle sadece eğilmeye zorlanan makine elemanlarıdır. Akslar, bazı dönen veya salınım hareketi yapan elemanları taşıyan ancak enerji iletmeyen elemanlardır. Millerden en önemli farkları döndürme momenti veya enerji iletmemelerinden dolayı burulmaya zorlanmamalarıdır. Bu nedenle aks, burulma momenti iletmeyen bir mildir şeklinde de tanımlanabilir. Akslar genel olarak halat makaraları, taşıt tekerlekleri, konveyör destek makaraları ve tamburları, gergi amaçlı kasnaklar, zincir dişlileri ve dişli çarkları taşırlar. Aksın taşıdığı eleman sabit veya döner olabileceği gibi kendisi de sabit veya döner olabilir.

5.1.2 Sınıflandırma

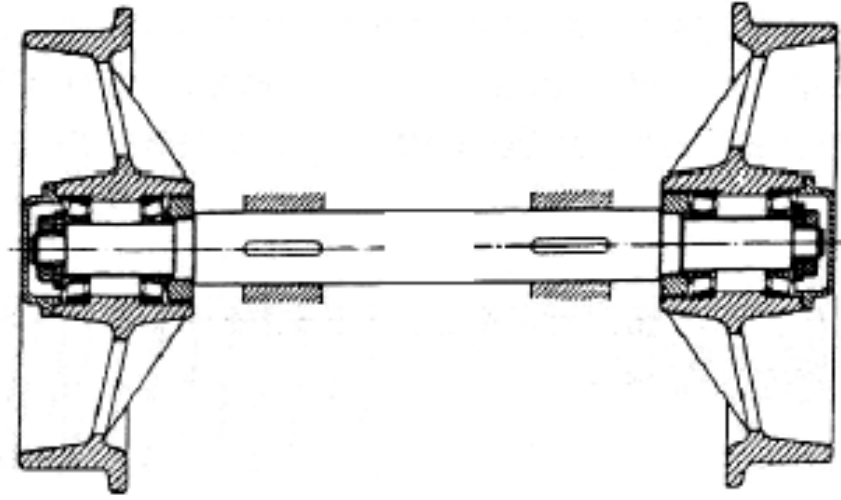
Akslar dönen ve dönmeyen (duran) akslar olarak ikiye ayrılırlar. Döner akslar şekil olarak millere benzer ve dönebilecek şekilde sabit bir gövdeye yataklanmıştır. Tekerlek vb elemanlar aksa kama veya sıkı geçme ile bağlanmışsa aks tekerlekle birlikte dönmek zorunda kalacaktır. Dönen aksa gelen eğilme gerilmeleri dönmeden dolayı dinamik karakterdedir.

Sabit veya dönmeyen aksta, aksın kendisi bir gövdeye tespit edilmiş olup tekerlek vb elemanlar aks etrafında rahatça dönerler. Önden çekişli otomobillerde arka tekerlek aksları duran aksa örnek olarak verilebilir. Bu elemanlar burulmaya zorlanmazlar. Buna karşılık yük altında eğilmeye zorlanırlar. Duran akstaki eğilme gerilmesi statiktir. Sabit akslarda çark, tekerlek gibi elemanlar aks üzerine bir yatak yardımıyla monte edilir. Aksı zorlayan kuvvet statik olduğunda aks zorlaması statik, dinamik veya değişken olduğunda zorlanma dinamik olacaktır. Şekil-5.1 tipik dönen ve duran akslara birer örnek vermektedir. Akslar genel olarak eksen durumuna göre düz elemanlardır.

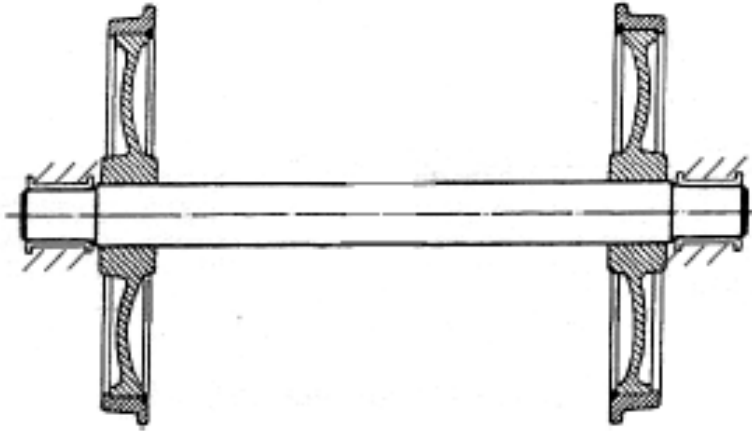
Miller görünüşlerine ve eksenlerine göre sınıflandırılırlar. Uygulamada kullanılan belli başlı miller,

- Düz miler
- İçi boş miller
- Faturalı miller
- Dirsekli miller (Krank milleri)
- Mafsallı miller
- Esnek miller

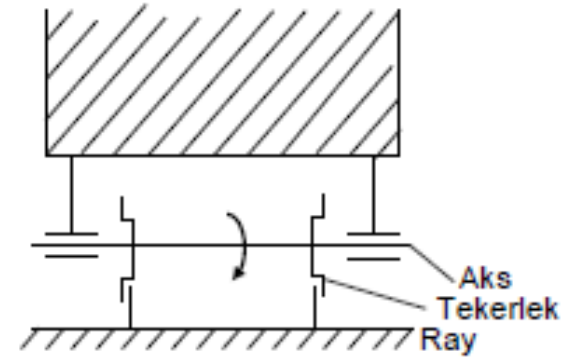
şeklinde olabilmektedir. Genel olarak bir milin yatak içinde kalan kısmına muylu denir. Eğer milin bütün muyluları aynı eksen üzerinde ise düz mil, birden çok eksen üzerinde ise dirsekli mil veya krank mili söz konusudur. Sabit kesitli dolu mil, kademeli (faturalı) mil, içi boş mil düz miller grubundadırlar. Krank millerinde ana muylular ile biyel muyluları aynı ekseninde değildir. Bu miller motorlarda öteleme hareketini dönme hareketine dönüştürüp moment iletmeye yardımcı olurlar. Şekil-5.2 ve 5.3'te seçilmiş mil örnekleri verilmiştir.



a) Sabit (dönmeyen) aks [25]



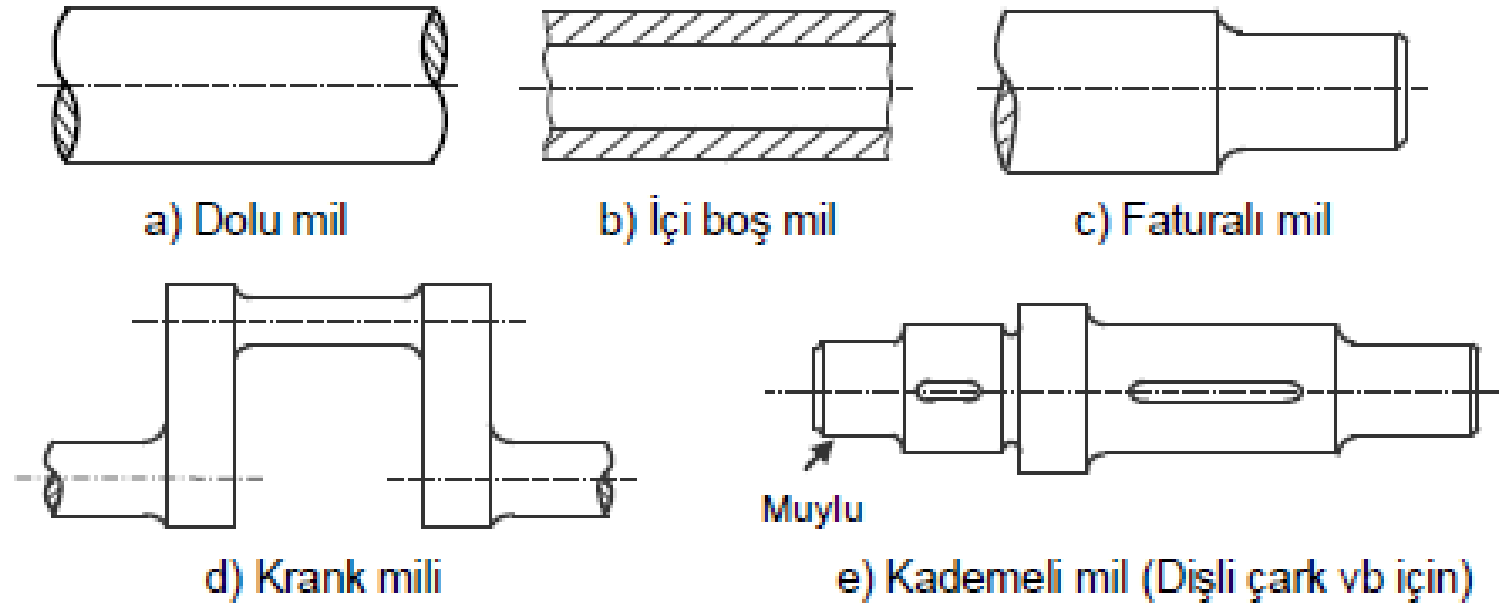
b) Döner aks [25]



c) Döner aks

Şekil-5.1 Seçilmiş aks örnekleri

Miller dönme hareketinin iletilmesinde statik yüklerin (taşıma elemanlarının ağırlıkları, yönü değişmeyen dişli, kayış kuvvetleri gibi) etkisiyle dinamik zorlanmaya maruz kaldıklarından çentiğe karşı hassastırlar. Bu ve benzeri etkiler ile azaltma yolları mil konstrüksiyonları kısmında ayrıca izah edilecektir.



Şekil-5.2 Seçilmiş mil çeşitleri

5.2 AKS VE MİLLERİN HESABI

Aks ve millerin fonksiyonlarını beklenen şekilde yerine getirebilmeleri için öncelikle üzerlerine etki eden yükleri (kuvvet ve/veya momentleri) emniyetle taşıması beklenir. Bu, sözü edilen elemanların yeterli mukavemette olması anlamına gelir. Yine mil ve aksların yükler altında eğilme ve burulma hallerinde yeterli rijitliğe sahip olmaları başka bir ifadeyle oluşacak eğim ve çökmenin (sehimin) belirlenen veya öngörülen sınırı aşmaması hedeflenir. Millerin eğilme titreşimlerinde uygun bir kritik açısal hız veya dönme hızında çalışması ve rezonans tehlikesinin oluşmamasına dikkat edilir. Bu bölümde akslarda eğilme, millerde mukavemet hesabı (burulma veya eğilme+burulma, şekil değiştirme, deformasyon) hesabı ve titreşim hesabı özetlenecektir.

5.2.1 Aksların Hesabı

Akslar genel olarak kesme kuvveti ve eğilme momenti ile zorlanırlar. Dönen ve sabit akslarda gerilmelerin değişme şekli farklı olduğundan bu durum emniyet gerilmelerinin tayininde dikkate alınır. Mukavemet hesabında önce aksın yatak noktaları veya destekleme yerleriyle kuvvetlerin uygulama noktalarını gösteren bir model oluşturulur ve gerekli tepki kuvvetleri ve maksimum eğilme momenti hesaplanır. Aksın boyutlandırma hesabı buna göre yapılır. Ön boyutlandırmada emniyet katsayısı oldukça büyük seçilir. Kontrol hesabıyla da gerçek emniyet katsayısı belirlenir.

Çapı d olan dolu bir aks için eğilme gerilmesi

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W_e} = \frac{32M_e}{\pi d^3} \leq \sigma_{e_{em}} \quad (5.1)$$

formülünden bulunur. Bu ifade esas olmak üzere boyutlandırma için gereken aks çapı

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_e}{\pi \sigma_{e_{em}}}} \quad (5.2)$$

şeklinde bulunur. İçi boş aks için, d dış çap, d_i 'de iç çap olmak üzere eğilme gerilmesi

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W_e} = \frac{32M_e d}{\pi(d^4 - d_i^4)} \leq \sigma_{e_{em}} \quad (5.3)$$

bulunur. $c=d_i/d$ boyutsuz çaplar oranı olarak tarif edilerek aks çapı d

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{1}{(1-c^4)} \frac{32M_e}{\pi\sigma_{e_{em}}}} \quad (5.4)$$

olur. Emniyet gerilmeleri, statik zorlanma için

$$\sigma_{e_{em}} = \frac{\sigma_{AK}}{S} \quad (5.5)$$

tam değişken zorlanma için

$$\sigma_{e_{em}} = \frac{K_b K_y \sigma_D}{\beta_k S} \quad (5.6)$$

ifadesiyle belirlenir. Malzeme gerilmeleri ilgili çizelgelerden seçilir. Ön hesaplamalarda sabit aks için

$$\sigma_{e_{em}} = \frac{\sigma_{eT}}{S} \quad (5.7)$$

AKSLAR VE MİLLER

ve aks çapı

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_e}{\pi \sigma_{eem}}} = \sqrt[3]{\frac{32M_e}{\pi(\sigma_{eT} / S)}} \quad (5.8)$$

bağıntısıyla da hesaplanır. Burada σ_{eT} ; titreşimli hal için eğilme mukavemet değeri, S emniyet katsayısıdır (3...5).

Aksın dönmesi halinde de

$$\sigma_{eem} = \frac{\sigma_{eTD}}{S} \quad (5.9)$$

ve aks çapı

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_e}{\pi(\sigma_{eTD} / S)}} \quad (5.10)$$

şeklinde hesaplanır. Burada σ_{eTD} , tam değişken hal için eğilme mukavemet değeri, S emniyet katsayısıdır (4...6).

5.2.2 Mil Mukavemet Hesabı

Miller burulmaya ve eğilmeye zorlanırlar. Mukavemet hesabı için akslarda olduğu gibi burada da basit bir model oluşturulup tepkiler, eğilme momenti diyagramı çizilip maksimum eğilme momenti belirlenir. Mil hesabında sadece burulma, sadece eğilme ve bileşik yükleme durumlarına göre mili zorlaya gerilmeler belirlenip boyutlandırma yoluna gidilir.

5.2.2.1 Burulma Hali

Genellikle millerde burulma zorlanması yanında eğilme de bulunur. Bazı durumlarda üzerinde eleman bulunmayan miller sadece burulmaya zorlanırlar. Burulma momenti (döndürme momenti) ileten bir milde kayma gerilmesi

$$\tau = \frac{M_b}{W_b} \leq \tau_{em} \quad (5.11)$$

şeklindedir. Burada burulma direnç momenti $W_b = \pi d^3 / 16$ olup mil çapı d

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_b}{\pi \tau_{em}}} \quad (5.12)$$

şeklinde elde edilir. Burada τ_{em} mil malzemesi için belirlenen burulma emniyet gerilmesi olup statik olduğu varsayılan zorlanma durumu için

$$\tau_{em} = \frac{\tau_{AK}}{S} \quad (5.13)$$

ve burulma momenti zamanla değişiyorsa

$$\tau_{D_{em}} = \frac{\tau_D K_y K_b}{\beta_k S} \quad (5.14)$$

bağıntılarıyla hesaplanır.

Mili burulmaya zorlayan moment güç kaynağından veya motordan gelen moment olup döndürme momenti (M_d) olarak adlandırılır. İletilen güç N ise belli bir hızda bu güç

$$N = M_d \omega \quad (5.15)$$

temel eşitliği ile bulunabilir. $\omega = \pi n / 30$ (1/sn) açısal hız, N güç olup birimi (Watt=Nm/sn) şeklindedir. Pratikte güç birimi olarak kW=1000W daha çok kullanıldığından (5.15) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$M_d = 9550 \frac{N}{n} \quad (5.16)$$

bulunur. Burada $[M_d]: N.m$, $[N]: kW$, $[n]: d/dak$.

Mil çapını veren ifade (5.12) yeniden değerlendirilirse

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 9550}{\pi \tau_{em}}} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = b \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

elde edilir. Düşük karbonlu çeliklerin tümünü kapsayacak şekilde $\tau_{em} = 12 \text{ N/mm}^2$ alınırsa, mil çapı emniyetli bir yaklaşımla

$$d = 160 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad (5.17)$$

bulunur. $[d]: \text{mm}$, $[N]: kW$, $[n]: d/dak$

Mukavemet kriteri esas alınarak yataklar arası uzaklık

$$L \cong 310 \sqrt{d} \quad (5.18)$$

olarak hesaplanabilir. Burada $[d]: \text{mm}$

Eski güç birimi olan beygir gücü (BG) kullanılarak döndürme momenti

$$M_d = 71620 \frac{N}{n} \quad (5.19)$$

ile $\tau_{em} = 120 \text{ daN} / \text{cm}^2$ alınarak mil çapı

$$d = 14.4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad (5.20)$$

şeklinde de bulunabilir. Burada $[d]:\text{cm}$, $[N]:\text{BG}$ ve $[n]:d/\text{dak}$ 'dır. (5.18) eşitliğinde $[M_d]: \text{daN.cm}$ veya kgf.cm alınmaktadır.

Ancak (5.17) ve (5.20) eşitlikleri pratik bağıntılar olup oldukça büyük çap değeri vermektedir ve ayrıca kontrol gereği duyulmaz. Özel bir malzeme söz konusu ise o malzemenin τ_{em} değeri kullanılarak mil çapı (5.12) eşitliğinden bulunur.

5.2.2.2 Burulma ve Eğilme

Miller için genellikle bu tür zorlanmalar söz konusudur. Mil döndüğü için eğilme gerilmesi dinamiktir. Burulma gerilmesi ise statik kabul edilir. Bu nedenle milin sürekli mukavemete göre kontrol edilmesi gereklidir.

Dinamik eğilme gerilmesi

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W_e} = \frac{M_e}{\pi d^3 / 32} \quad (5.21)$$

ve statik burulma gerilmesi $\bar{\tau} = \bar{M}_b / W_b$ ile

ortalama ve üst gerilmeler sırasıyla

$$\sigma_m = \bar{\sigma}_{ef} \quad \text{ve} \quad \sigma_u = \bar{\sigma}_{ef} + \sigma_{ef} \quad (5.22)$$

AKSLAR VE MİLLER

şeklinde belirlenir. (Bu konu bölüm 2'de detaylı anlatılmıştır). Sürekli mukavemet için küçültülmüş diyagram çizilerek

$$\sigma_a \leq \sigma'_a$$

şartı incelenir. Eğer M_e statik kabul edilirse maksimum şekil değiştirme enerjisi hipotezine göre eşdeğer moment

$$M_{eq} = \sqrt{M_e^2 + 0.75M_b^2} \quad (5.23)$$

elde edilir. Çap için de hesap yapılmak istenirse $\sigma_{eq} = \sigma_{em}$ alınıp

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{eq}}{\pi\sigma_{em}}} \quad (5.24)$$

kullanılır.

Mili zorlayan döndürme momenti ve eğilme momenti yaklaşık olarak biliniyorsa eşdeğer gerilme maksimum şekil değiştirme enerjisi hipoteziyle

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_e^2 + 3(\alpha_0\tau)^2} \quad (5.25)$$

yayılır. Burada α_0 eğilme ve burulma momentlerinin farklı karakterde olduklarını ifade eden bir sayıdır. Eğilme gerilmeleri tam değişken olup alınacak referans mukavemet değeri σ_{em} , döndürme momenti dolayısıyla alınacak kayma gerilmesi ya statik ya da titreşimlidir. Burada da mukavemet değeri olarak τ_T (titreşimli) alınabilir. Bu bilgilerle α_0 sayısı

$$\alpha_0 = \sigma_{em} / (\sqrt{3}\tau_T) \quad (5.26)$$

olur. Çizelge 5.1 incelendiğinde $\alpha_0=0.6....0.8$ arasında değiştiği görülür ve $3\alpha_0^2=2$ alınarak tüm malzemeleri kapsayan bir değerle eşdeğer gerilme

$$\sigma_{e\tau} = \sqrt{\sigma_e^2 + 2\tau^2}$$

olarak değerlendirilebilir. Bu eşdeğer gerilmeyle d çapı (5.22) eşitliği yardımıyla belirlenebilir.

Eğilme ve burulma moment diyagramları çizilerek en çok zorlanan kritik kesitler belirlenir. Mil farklı düzlemlerde etkiyen kuvvetlerle zorlanıyorsa kuvvetlerin düşey ve yatay düzlemlerdeki bileşenleri belirlenir daha sonra her iki düzlemdeki mesnet kuvvetleri bulunur. Bu kuvvetler esas olmak üzere iki düzlemdeki momentler (M_x, M_y gibi) ayrı ayrı hesaplanan bileşke eğilme momenti

$$M_e = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

ile hesaplanır. Boyutlandırma ve kontrol hesapları bu bileşke momente göre yapılır.

Değişken (dinamik) zorlanma durumunda emniyet gerilmesi

$$\sigma_{em} = \frac{\sigma_{ed} K_b K_y}{\beta_k S} \quad (5.27)$$

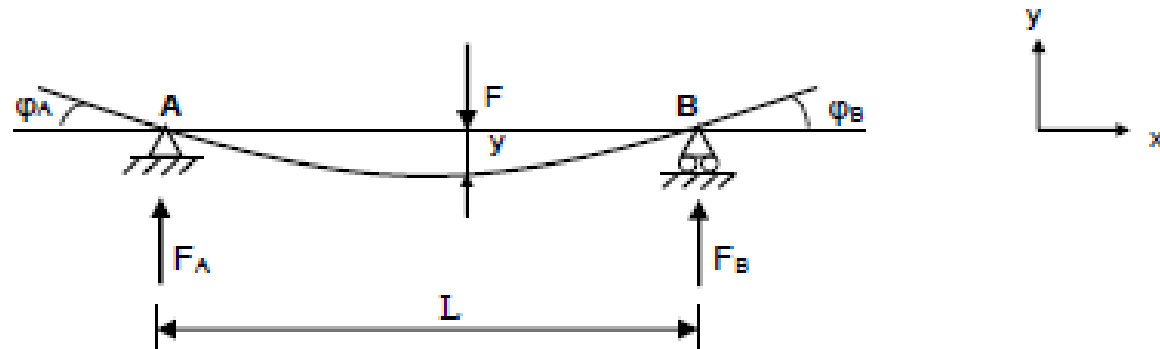
ifadesinden bulunarak eşdeğer gerilme $\sigma_{e\tau} \leq \sigma_{em}$ şartını sağlayacak şekilde boyutlandırma yapılır. Çentik faktörü β_k , farklı mil şekilleri için eğilme ve burulma halleri de Çizelge-5.2'de verilmiştir.

5.2.3 Şekil Değişirme (Deformasyon) Hesabı

Miller eğilmeye ve burulmaya zorlandıklarından her iki halde de şekil değiştirmeler veya deformasyonlar söz konusudur. Bu şekil değiştirmeler dolayısıyla mil ve üzerindeki elemanların görev yapması engellenebilir. Eğilme halinde ortaya çıkan sehim (çökme) müsaade edilen sınır değeri aşınca yataklar başta olmak üzere hareket hassasiyeti önemli olan eş çalışan parçalarda istenmeyen durumlar söz konusu olabilecektir. Bu nedenle eğilme ve burulma şekil değişimlerinin belirlenen sınır değerlerin üzerine çıkmaları istenmez.

5.2.3.1 Eğilme Deformasyonu

Eğilmeye zorlanan bir milde y şekil değişimi (sehim veya çökme) ve φ eğim açısı oluşur (Şekil-5.4)



Şekil-5.4 Eğilmede şekil değişimi

AKSLAR VE MİLLER

Eğimden doğan şekil değişimleri

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_e}{E I} \quad (5.29)$$

elastik eğri denkleminde bulunabilir. Bu denklemin çözümünden elde edilen değişik yükleme durumlarına göre sehim (çökme) değerleri bölüm 2'de anlatılmış ve seçilen sonuçlar kitabın sonunda Çizelge-E 2.3'te verilmiştir. Burada açılar küçük olduğundan

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$$

eğri teğetinin eğimi olarak elde edilir. Çökme ise iki defa integre edilerek bulunur. İncelenen özel halde

maksimum çökme	$x=L/2$ için	$y_{\max}=FL^3/48E I$	(5.30a)
----------------	--------------	-----------------------	---------

maksimum eğim açısı	$x=0$ için	$\varphi_{\max} = FL^2 / 16E I$	(5.30b)
---------------------	------------	---------------------------------	---------

bulunur.

y_{max}/L oranının belli bir değerin altında olması istenir. Her makinanın kendi sınırlayıcı değerleri olmakla birlikte genel olarak mildeki en büyük çökme için L iki yatak arasındaki uzaklık olmak üzere $0.0005L$ değeri kullanılabilir. Kesin emniyet sınırı olmamakla birlikte çökme ve açısal deformasyon için

$$\frac{y_{max}}{L} \leq \frac{1}{3000} \quad \text{ve} \quad \varphi \cong tg\varphi = 1/1000 \text{ rad}$$

değerleri alınabilir. Pratik bakımdan δ çökme sembolü olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \delta &\leq \delta_{em} \\ \varphi &\leq \varphi_{em} \end{aligned} \tag{5.31}$$

olmalıdır. Genel makina konstrüksiyonunda $\delta_{em} \leq 0.0002 L$ tavsiye edilmektedir. φ_{em} için de $\varphi_{em} \leq 0.001$ radyan kullanılabilir.

$y_{max} / L = 1 / 3000$ değeri için yataklar arası uzaklık

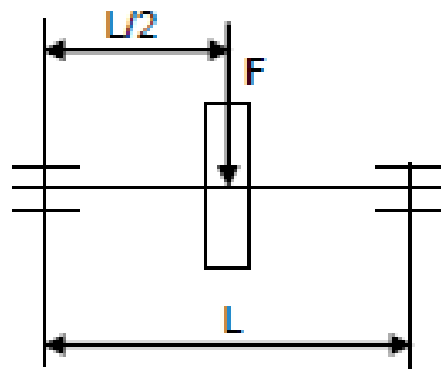
$$L \cong 50 \sqrt[3]{d^2} \tag{5.32}$$

eşitliği kullanılabilir. Burada $[d]:cm$ olarak değerlendirilmektedir.

Milde eğilme rijitliği: Genel rijitlik tanımıyla eğilmeye zorlanan bir milde rijitlik

$$k = \frac{F}{\delta} \tag{5.33}$$

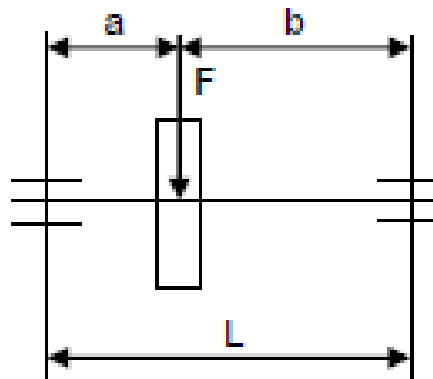
şeklinde ifade edilir. Çeşitli eğilme durumlarında mil eğilme deformasyonu ve rijitlikleri bulunabilir (Şekil-5.5)



(a)

$$\delta = \frac{F L^3}{48 EI}$$

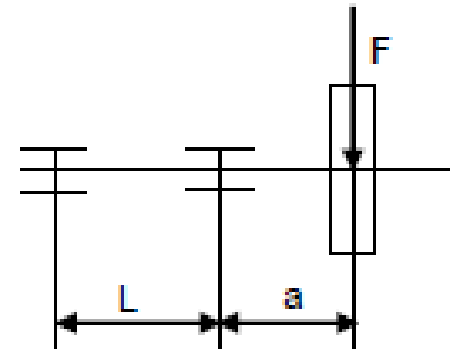
$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{48 EI}{L^3}$$



(b)

$$\delta = \frac{F a^2 b^2}{3 E I L}$$

$$k = \frac{3 E I L}{a^2 b^2}$$



(c)

$$\delta = \frac{F a^2 (a + L)}{3 E I}$$

$$k = \frac{3 E I}{a^2 (a + L)}$$

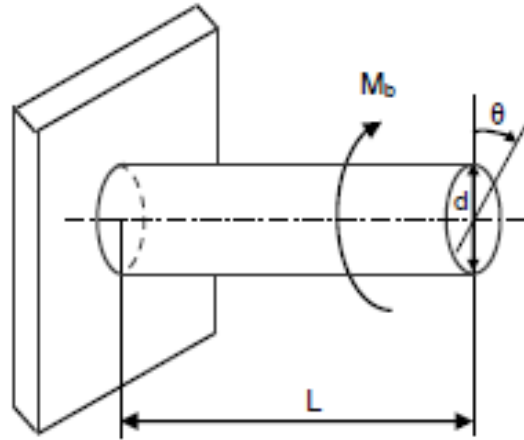
Şekil-5.5 Çeşitli haller için milin eğilme rijitliği

5.2.3.2 Burulma Deformasyonu

Döndürme momenti ileten bir milde açısal dönme veya burulma açısı mil uzunluğu L ve burulma momenti M_b ile doğru orantılı, kesit kayma modülü ve polar atalet momentiyle ters orantılıdır. Buna göre şekil-5.6'da gösterilen θ burulma açısı

$$\theta = \frac{M_b L}{G I_p} \leq \theta_{cm} \quad (5.34)$$

şeklinde olmalıdır.



Şekil-5.6 Burulma deformasyonu

Bu eşitlik τ kayma gerilmesi cinsinden $I_p = W_b \frac{d}{2}$ ve $\tau = M_b / W_b$ kullanılarak

$$\theta = \frac{2 \tau L}{G d} \leq \theta_{cm} \quad (5.35)$$

AKSLAR VE MİLLER

makina konstrüksiyonunda genel olarak 1m boyda $\theta_{em} = 0.25^0$ alınmaktadır. Deformasyon kriteri dikkate alınarak ve $L=1000 \text{ mm}$, $G=80000 \text{ N/mm}^2$, $I_p \cong 0.1 d^4$ ve $M_b = 9550 \frac{N}{n}$ ile mil çapı

$$d = 130 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad (5.36)$$

olabilmektedir. Burada $[d]:mm$, $[N]:kW$, $[n]:d/dak$.

Deformasyon kriteri esas alınarak yataklar arası uzaklık

$$L \cong 11 \sqrt[3]{d^2} \quad (5.37)$$

yazılabilir. Burada $[d]:mm$

Ancak bu eşitlikler çok kullanılmamaktadır. Genel mil çapı için $I_p = \pi d^4 / 32$ olmak üzere

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_b L}{\pi G \theta_{em}}} \quad (5.38)$$

eşitliği kullanılır.

Değişken kesitli millerde (l_1, l_2, l_3, \dots uzunlukları ve d_1, d_2, d_3, \dots çaplarına sahip kademeli millerde) burulma açısı yaklaşık olarak

$$\theta = \frac{M_b}{G} \left(\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} + \dots \right)$$

veya $\theta \cong \frac{M_b}{G} \left(\frac{l_1}{d_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4} + \dots \right) \cong \frac{M_b}{G} \sum \frac{l_i}{d_i^4}$ (5.39)

bağıntısıyla hesaplanabilir. Burada G kayma modülüdür.

Mil burulma rijitliği

$$k_\theta = \frac{M_b}{\theta} = \frac{G I_p}{L} \quad (5.40)$$

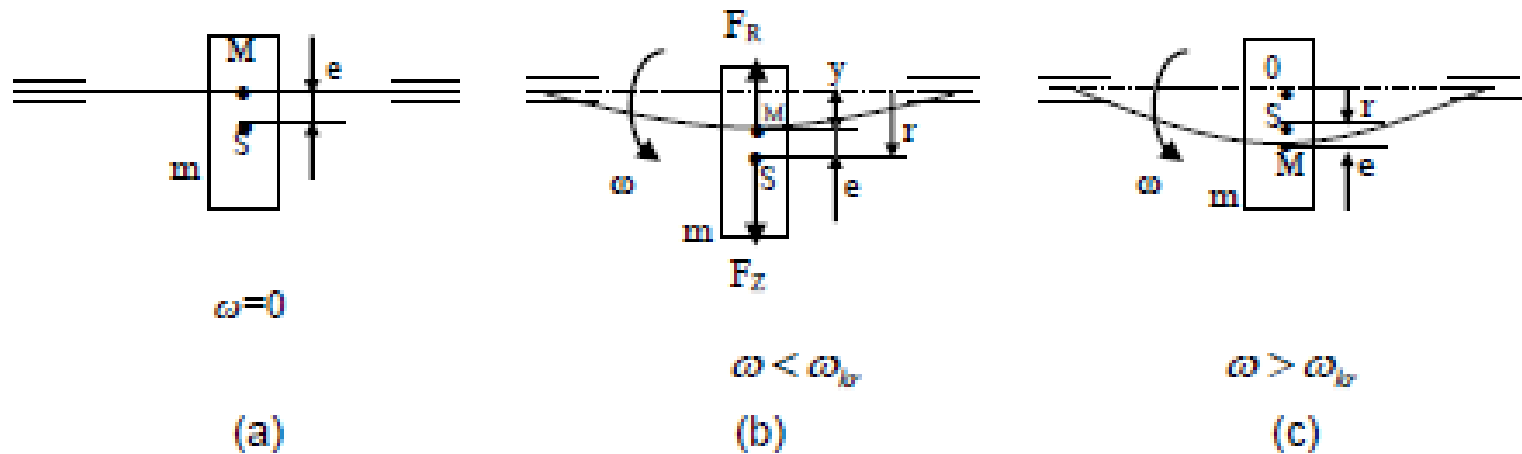
şeklinde ifade edilir.

5.2.4 Titreşim Kontrolü

Miller taşıdıkları elemanlara göre nispeten esnek elemanlardır. Millerde, hem kendi ağırlıkları hem de taşıdıkları dişli çark, kavrama gövdesi, kasnak vb elemanların ağırlıkları veya kütleleri elastik deformasyona neden olabilmektedir. Çok hızlı dönen millerde de dengeleme ve titreşim problemleri ortaya çıkmaktadır. Milin yay, taşınan diğer elemanların da kütle olarak değerlendirilmesinde dönen sistem bir yay-kütle sistemi ortaya çıkartır ve belirli bir dönme hızında bu yay-kütle sistemi nispeten büyük genlikli titreşimler doğurur. Mil sistemindeki küçük bir dengesizlik büyük merkezkaç kuvvetlerinin doğmasına yol açabilir ve mil titreşimi kritik bir hal alabilir. Miller hem burulma hem de eğilme titreşimleri yapabilmektedir. Her mil burulma ve eğilme rijitliğine göre burulma ve eğilme titreşimleri için belirli doğal frekanslara sahiptir ve uygun bir zorlanma frekansında bu titreşimleri yapar.

5.2.4.1. Eğilme Titreşimleri

Hassas dengelenmiş bir sistemde bile imalat ve montaj hatalarından dolayı dengelenmemiş bir kütle bulunabilir. Tam olarak merkezlenememiş bir disk, kasnak, dişli vb dönen elemanların ağırlık merkezleri mil merkezi ile çakışmaz, aralarında bir eksantrisite (e) bulunabilir (Şekil-5.7). Şekildeki gibi simetrik bir disk iki noktadan yataklanmış bir mile e eksantrikliğiyle monte edilmiş olsun. Problemi basitleştirmek için milin kütlesi ihmal edilip diskin kütlesinin merkezde toplandığı varsayılmaktadır. Milin bir k rijitliğine sahip olduğu kabul edilerek m kütleli elemanın dönmesi sırasında dengelenmemiş merkezkaç kuvveti etkisinde milin eğildiği görülecektir (b).



Şekil-5.7 Dengelenmemiş kütle ve mil titreşimleri

Mil ω açısal hızıyla dönerken ortaya çıkan merkezkaç kuvvet başlangıçta e 'den dolayı

$$F_z = m \omega^2 e \quad (5.41)$$

şeklinde olacaktır. Bu kuvvet mili eğilmeye zorlayacağından bir y sehimi veya çökme daha doğacaktır. Bu çökme dengesizliği büyüterek yeni durumda $(y+e)$ eksen kaçıklığından dolayı

$$F_z = m \omega^2 (e + y) \quad (5.42)$$

merkezkaç kuvveti doğar ve sehimin artmasına neden olur. Bu merkezkaç kuvvetine milin rijitliğinden (katılığından) doğan karşı kuvvet (elastik kuvvet)

$$F_R = k y \quad (5.43)$$

direnç gösterecektir. Bu elastik kuvvet merkezkaç kuvveti dengeliyorsa ($F_z = F_R$)

$$m \omega^2 (e + y) = k y$$

olacaktır. Merkezkaç kuvvetiyle milin çökmesi

$$y = \frac{m \omega^2}{k - m \omega^2} e \quad (5.44)$$

bulunur. Bu eşitlikten, $k - m \omega^2 = 0$ için y sehiminin sonsuza (∞) gittiği görülecektir. Bu şartı sağlayan ω açısal hızı sistemi rezonansa sokar ve sehimi sonsuza gider. ω 'nın bu değerine kritik açısal hız (ω_{kr}) denir ve

$$\omega = \omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.45)$$

şeklinde elde edilir. Bu kritik hız özgül hız olarak da bilinir. Kritik devir sayısı ise

$$n_{kr} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.46)$$

ifadesi ile elde edilir. Burada k milin rijitliği veya yay katsayısı olup verilen örnekte $k = 48 EI / L^3$ yazılabilir. Bu analize göre $\omega = \omega_{kr}$ için $y = \infty$ olur ve mil kırılma tehlikesi ile karşı karşıyadır. Bu hal ($\omega = \omega_{kr}$) rezonans hali olarak tanımlanır.

Kuvvet dengesini veren ifade yeniden düzenlenirse

$$\omega^2 = \frac{ky}{me + my} \quad (5.47)$$

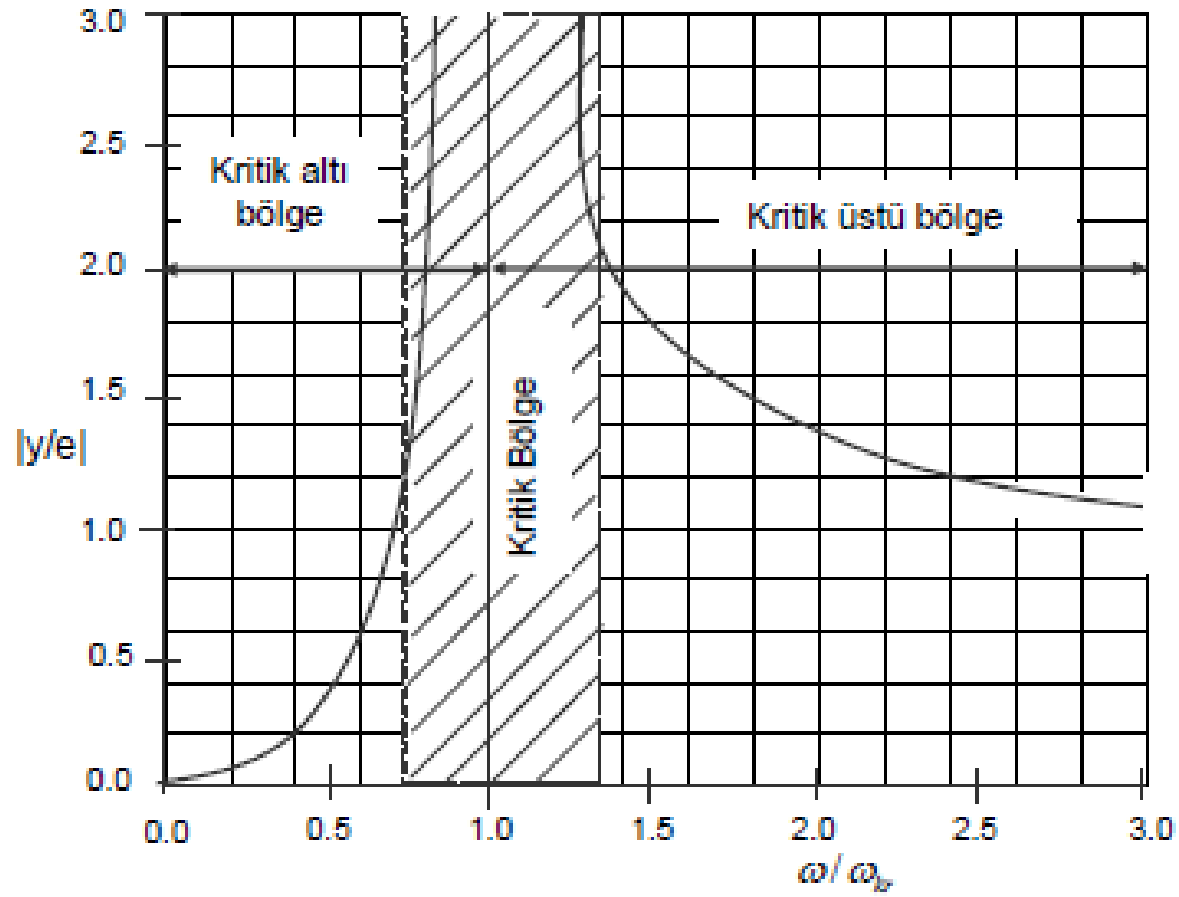
bulunur. $\omega = \infty$ için $y = -e$ değerini almakta olup bu olaya kendi kendini merkezleme denmektedir (c). Bu bölgede hız arttıkça mil daha düzgün bir şekilde çalışmaktadır.

(5.44) eşitliği kritik açısal hıza göre yeniden düzenlenirse

$$\frac{y}{e} = \frac{(\omega / \omega_{kr})^2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_{kr}})^2} \quad (5.48)$$

eşitliği elde edilir. Şekil-5.8a sehimi değerinin mutlak değerinin ω / ω_{kr} oranına göre değişimini vermektedir. Ancak pratikte Şekil-5.8b'de gösterilen eğri grubu kullanılmaktadır. Bu diyagramdan miller için iki çalışma bölgesi mevcut olup kritik altı ($\omega < \omega_{kr}$) ve kritik üstü ($\omega > \omega_{kr}$) bölgeleri değerlendirilerek mil hızının seçilmesi zorunludur.

Kritik altı bölgede hız arttıkça sehimi artmaktadır. Kritik bölgeye yaklaştıkça $\omega = \omega_{kr}$ değerine erişmekte ve teorik olarak $y = \infty$ olmakta ve mil kırılma tehlikesi göstermektedir. Kritik üstü bölgede ($\omega > \omega_{kr}$) ω 'nin artması ile milin çökmesi azalır ve teorik olarak $\omega = \infty$ için $y = -e$ değerini alır. Bu olaya kendi kendine merkezleme denmekte olup bu bölgede hız arttıkça mil daha düzgün bir şekilde çalışmaya başlamaktadır. Başka bir ifadeyle y ve e birbirine ters konuma geçtiklerinden ω büyüdükçe y sehimi azalmaktadır. Yeniden düzgün veya kararlı bir çalışmaya geçilmektedir.



(b)

Şekil-5.8 Mil titreşiminde kritik hız diyagramları

AKSLAR VE MİLLER

Kritik altı ve kritik üstü bölgeleri genelde emniyetli çalışma bölgeleri olduğu halde, kritik hızın %10 altında ve üstünde sınırlanmış bir tehlike bölgesi söz konusudur (şekilde taralı bölge). Bu nedenle pratik emniyetli çalışma bölgesi

$$\omega \leq (0.7 \dots 0.8) \omega_{kr} \quad \text{ve} \quad \omega \geq (1.2 \dots 1.3) \omega_{kr}$$

$$\text{ve} \quad n \leq (0.7 \dots 0.8) n_{kr} \quad n \geq (1.2 \dots 1.3) n_{kr}$$

şeklinde değerlendirilir. Eğer kritik bölgede çalışma zorunluluğu varsa sisteme dinamik söndürücüler ilave edilerek tehlike bölgesi başka bir noktaya kaydırılabilir.

Milin üzerindeki parçanın G_0 ağırlığı dikkate alınır ve $k=G_0/\delta_0$, $m= G_0/g$ değerleriyle

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} \quad (5.49)$$

$$n_{kr} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} \quad (5.50)$$

elde edilir. Burada δ_0 ağırlık etkisiyle oluşan statik çökmedir. $g=981 \text{ cm/sn}^2$ ile

$$\omega_{kr} = 31.3 \sqrt{1/\delta_0} \quad (5.51)$$

$$\text{ve} \quad n_{kr} \cong 300 \sqrt{1/\delta_0} \quad (5.52)$$

elde edilir. Burada δ_0 cm olarak alınır.

İki tarafından yataklanmış sabit çaplı bir milde (sürekli yayılmış kütle) birçok kritik açısal hız vardır. Uzun ve ağır millerin kendi kütlelerinden doğan kritik hızları ihmal edilmek istenmezse milin kendi ana kritik açısal hızı

$$\omega_{krm} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.53)$$

eşitliği ile bulunur. Burada kesit atalet momenti $I = \pi d^4 / 64$, kesit alanı $A = \pi d^2 / 4$, mil yoğunluğu $\rho = \gamma / g$ ile

$$\omega_{krm} = 2.47 \frac{d}{L^2} \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} \quad (5.54)$$

olarak bulunur. Burada $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $g = 981 \text{ cm/sn}^2$ ve milin özgül ağırlığı $\gamma = 78.5 \times 10^{-3} \text{ N/cm}^3$ alınarak

$$\omega_{krm} = 124 \times 10^4 \frac{d}{L^2} \quad (5.55)$$

elde edilir.

Mil üzerinde birden çok kütle varsa (n adet kütle-dişli, kasnak vb) elemanların ve milin kendi ağırlıkları etkisiyle tüm sistemin kritik hızı ω_{kr} , Dunkerley yaklaşımıyla,

$$\frac{1}{\omega_{kr}^2} = \frac{1}{\omega_{krm}^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \quad (5.56)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada ω_{krm} milin kendi ağırlığı etkisiyle oluşan özgül hız, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ise m_1, m_2, \dots, m_n kütleleri etkisinde oluşan özgül hızlardır. (5.52) eşitliğine göre (5.56) eşitliği

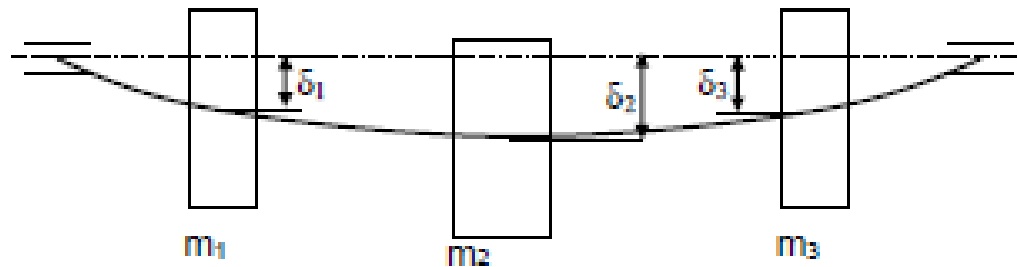
$$n_{kr} \cong 300 \sqrt{\frac{1}{\delta_m + \delta_1 + \delta_2 + \dots}} \quad (5.57)$$

şeklini alır (Şekil-5.9). Burada δ_m milin kendi ağırlığıyla çökmesidir.

Milin kendi ağırlığı ihmal edilirse ve üzerinde n adet ağırlık (G_1, G_2, \dots, G_n) varsa ağırlık cinsinden tüm sistemin kritik açısal hızı

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{g \sum_1^n G_i \delta_i}{\sum_1^n G_i \delta_i^2}} \quad (5.58)$$

yazılabilir. Burada δ_i , G_i ağırlığının doğurduğu çökme, g ise yer çekimi ivmesidir. Bu eşitlik Rayleigh-Ritz bağıntısı olarak bilinir.



Şekil-5.9 Birden çok kütle etkisinde çökmeler

5.2.4.2 Burulma Titreşimleri

Mil ve taşıdığı elemanlarda ortaya çıkan bir diğer titreşim şekli burulma titreşimleridir. Mil üzerindeki döndürme momentinde periyodik değişim oluyorsa mil burulma titreşimleriyle karşı karşıya kalır. Şekil-5.10'daki sistem burulma titreşimleri için esas alınrsa, döndürme momenti diski φ kadar döndürüldüğünde mil bir yay gibi direnç gösterecektir. Milin yay katsayısı k_θ ise burulma momenti

$$M_b = -I_m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = k_\theta \varphi \quad (5.59)$$

şeklinde yazılabilir. Böyle bir sistemin burulma kritik açısal hızı

$$\omega_{bkr} = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_m}} \quad (5.60)$$

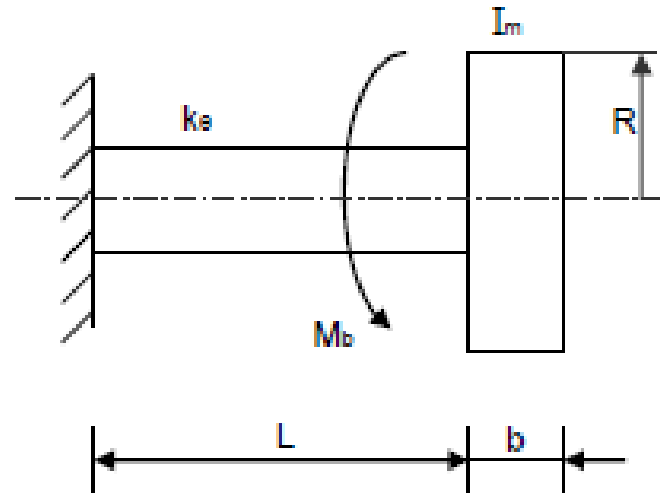
ve kritik devir sayısı

$$n_{bkr} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k_\theta}{I_m}} \quad (5.61)$$

elde edilir. Burada I_m diskin kütlelesel atalet (eylemsizlik) momentidir.

Milin L uzunluğu ve I_p kutupsal (polar) atalet momenti cinsinden kritik hızlar sırasıyla

$$\omega_{bkr} = \sqrt{\frac{G I_p}{I_m L}} \quad (5.62)$$



Şekil-5.10 Burulma titreşimi yapan bir sistem

$$\text{ve} \quad n_{bkr} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{G I_p}{I_m L}} \quad (5.63)$$

şeklinde elde edilir. Burada $I_p = \pi d^4 / 32$, milin polar atalet momenti, I_m silindirik elemanın (diskin) kütlelesel atalet momentidir. Dolu bir disk için kütlelesel atalet momenti

$$I_m = m \frac{R^2}{2} \quad (5.64)$$

olup kütle m,

$$m = \frac{\gamma}{g} b \pi R^2 \quad (5.65)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. L boyundaki çubuklar için $I_m = mL^3/3$, içi boş diskler için

$$I_m = m \frac{R_d^2 - R_i^2}{2} \quad (5.66)$$

ve kütle

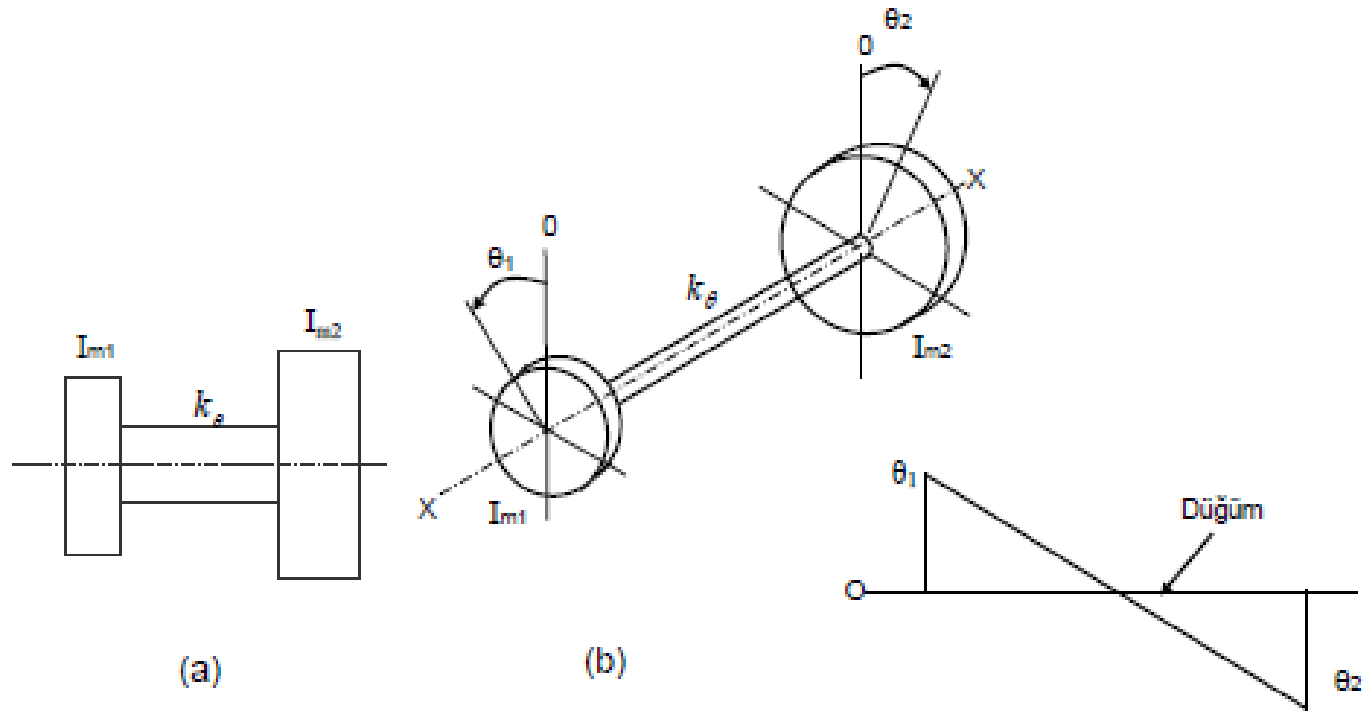
$$m = \frac{\gamma}{g} b \pi (R_d^2 - R_i^2) \quad (5.67)$$

yazılabilir. Bu ifadelerde R yarıçap, R_d ve R_i sırasıyla dış ve iç yarıçaptır. Dolu bir disk için $D=2R$ alındığında

$$I_m = \frac{G D^2}{8g} \quad (5.68)$$

kütlesel atalet momenti savurma momenti olarak tanımlanan GD^2 cinsinden de elde edilir. Burada G diskin ağırlığıdır.

Bir mil üzerinde iki farklı kütle bulunduğunda, burulma titreşimi esnasında bu diskler karşılıklı ve birbirine ters yönlerde titreşim yaparlar. Bu şekilde milin belirli bir kesiti sabit kalır. Bu kesite düğüm noktası adı verilir (Şekil-5.11).



Şekil-5.11 Burulma titreşimleri

Bu şekildeki sistemde milin düğüm noktasında ankastre olduğu ve her birinin ucunda bir disk bulunan iki milden oluştuğu düşünülebilir. Bu sistemde, oluşan yeni iki basit sistem doğal frekanslarının (burulma kritik açısal hızlarının) eşit olduğu kabul edilir. Buna göre

$$\omega_{blr} = \sqrt{\frac{k_{\theta_1}}{I_{m_1}}} = \sqrt{\frac{k_{\theta_2}}{I_{m_2}}} \quad (5.69)$$

$$\text{veya } \omega_{blr} = \sqrt{\frac{G I_p}{I_{m_1} L_1}} = \sqrt{\frac{I_p G}{I_{m_2} L_2}} \quad (5.70)$$

yazılarak $I_{m_1} L_1 = I_{m_2} L_2$ bulunur. $L = L_1 + L_2$ olduğuna göre

$$\omega_{blr} = \sqrt{\frac{I_p G}{L I_{m_s}}} = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_{m_s}}} \quad (5.71)$$

elde edilir. Burada I_{m_s} eşdeğer kütleli atalet momenti olup

$$I_{m_s} = \frac{I_{m_1} I_{m_2}}{I_{m_1} + I_{m_2}} \quad (5.72)$$

şeklinde ifade edilir Yukarıdaki hesap bazı basitleştirmelerden dolayı yaklaşıktır. Ancak oluşan hata %5'den daha az olmaktadır.

Mil üzerinde kütle sayısı arttıkça burulma titreşimleri için serbestlik derecesi birden fazla olur ve bu tip sistemlerde serbestlik derecesi kadar doğal frekans vardır. Bu gibi sistemlerin doğal frekanslarının (kritik açısal hızlarının) hesabı hakkında ayrıntılı bilgiler mekanik titreşimler konusuyla ilgili literatürden elde edilebilir.