Teorem 4.1.1: Her konik ekseni l ye göre simetriktir.

İspat: P konik üzerinde bir nokta ve Q onun l ye göre simetrik eşi olsun (Şekil 4.3 e bakınız). O zaman l $[PQ]$ nun kenarorta dikmesi olur, bu nedenle $|PF| = |QF|$ ve $|Pd| = |Qd|$ dir. $\square$

We denote the point of intersection of l and d by G. It is clear from Fig. 4.3 that

$$|Pd| = |PG||\cos\theta| = |\vec{P} - \vec{G}||\cos\theta|$$

where θ is the angle between the vectors $\vec{P}-\vec{G}$ and $\vec{F}-\vec{G}$. Then also we have

$$|\cos\theta| = \frac{|(\vec{P}-\vec{G})\circ(\vec{F}-\vec{G})|}{|\vec{P}-\vec{G}||\vec{F}-\vec{G}|}.$$

Hence $$|Pd| = \frac{|(\vec{P}-\vec{G})\circ(\vec{F}-\vec{G})|}{|\vec{F}-\vec{G}|}$$ and

$$\frac{|PF|}{|Pd|} = \frac{|\vec{P}-\vec{F}|}{|Pd|} = \frac{|\vec{P}-\vec{F}||\vec{F}-\vec{G}|}{|(\vec{P}-\vec{G})\circ(\vec{F}-\vec{G})|}.$$

Thus, the conic 4.1.1 can also be described as

$$\zeta = \{P : |\vec{P}-\vec{F}||\vec{F}-\vec{G}| = e|(\vec{P}-\vec{G})\circ(\vec{F}-\vec{G})|\} \quad \ldots (4.1.2)$$

l ve G nin kesişim noktasını G ile gösterelim. θ, $\vec{P}-\vec{G}$ ile $\vec{F}-\vec{G}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere Şekil 4.3 den

$$|Pd| = |PG||\cos\theta| = |\vec{P}-\vec{G}||\cos\theta|$$

olduğu açıktır. O zaman ayrıca

$$|\cos\theta| = \frac{|(\vec{P}-\vec{G})\circ(\vec{F}-\vec{G})|}{|\vec{P}-\vec{G}||\vec{F}-\vec{G}|}$$

olur. Böylece $|Pd| = \ldots$ ve $\frac{|PF|}{|Pd|} = \ldots$ dir.

Sonuç olarak, 4.1.1 koniği

$$\zeta = \ldots \qquad (4.1.2)$$

olarak tarif edilebilir.

Remark: In the foregoing discussions we have implicitely assumed that F doesn't lie on the directrix d. What happens if F lies on d? See Exercise 4.

Uyarı: Önceki tartışmada kapalı olarak F nin d doğrultmanı üzerinde yatmadığını kabul ettik. F d üzerinde olursa ne olur? Alıştırma 4 e bakınız.

The points at which the conic intersects its axis are called vertices of the conic. A vertex of the conic is either on the segment [GF] or it is outside the segment [GF]. If V is a vertex on the segment [GF] then

$$\vec{V} = k\vec{F} + (1-k)\vec{G}, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Koniğin eksenini kestiği noktalara koniğin köşeleri denir. Koniğin bir köşesi ya [GF] parçasının üzerinde ya da [GF] parçasının dışındadır. Eğer V köşesi [GF] parçasının üzerinde ise o zaman

$$\vec{V} = k\vec{F} + (1-k)\vec{G}, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

dir.

Since V is on the conic

$$e = \frac{|VF|}{|Vd|} = \frac{|\vec{F}-\vec{V}|}{|\vec{G}-\vec{V}|} = \frac{|1-k||\vec{F}-\vec{G}|}{|k||\vec{F}-\vec{G}|} = \frac{1-k}{k}.$$

This yields $k = \frac{1}{1+e}$. Hence the point V which is given by

$$\vec{V} = \frac{\vec{F}+e\vec{G}}{1+e} \quad \ldots (4.1.3)$$

is a vertex of the conic on the segment [GF]. If V' is a vertex outside the segment [GF] then

$$\vec{V'} = s\vec{F} + (1-s)\vec{G}, \quad s<0 \text{ or } s>1.$$

Also

$$e = \frac{s-1}{s}, \quad s<0 \text{ or } s>1.$$

V konik üzerinde olduğundan

$$e = \cdots\cdots = \frac{1-k}{k}$$

dır. Bu ise $k = \frac{1}{1+e}$ demektir. Böylece

$$\vec{V} = \frac{\vec{F} + e\vec{G}}{1+e} \quad \ldots (4.1.3)$$

ile verilen V noktası koniğin [GF] parçası üzerinde bulunan bir köşesidir. Eğer V' [GF] parçası dışında bir köşe ise o zaman

$$\vec{V} = s\vec{F} + (1-s)\vec{G} \quad s<0 \text{ veya } s>1$$

dır.

Ayrıca $e = \frac{s-1}{s}, \quad s<0$ veya $s>1$

dır.

If $e=1$, then there is no $s<0$ or $s>1$ satisfying the equation $e = \frac{s-1}{s}$. Therefore if $e=1$ then the conic has only one vertex V, which is on the segment [GF]. However, if $e \neq 1$, then $s = \frac{1}{1-e}$ satisfies the equation $e = \frac{s-1}{s}$ and the point V' that is given by

$$\vec{V}' = \frac{\vec{F} - e\vec{G}}{1-e} \quad \ldots (4.1.4)$$

is a vertex of the conic outside the segment [GF]. Location of the vertices relative to the points G and F is completely determined by the eccentricity e (See Fig. 4.4).