Tahmin Problemine Giriş:

İstatistiğin esas amaçlarından biri, üzerinde çalışılan kitle hakkında bilgi sahibi olmaktır. Yani kitlenin parametreleri hakkında tahminlerde bulunmaktır. Tek bir deneyle istatistiki sonuç çıkarımı yapmak anlamlı değildir. Dolayısıyla deneyler tekrar edilir. Bir deney aynı koşullarda tekrarlandığında aynı sonuç gözlenmeyebilir.

Birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip $X_1, \ldots, X_n$ t. d. lerine bir örneklem denir.

$X_1, \ldots, X_n$ olasılık/olasılık yoğ. fonk. $f(x_i$ olan kitleden bir örneklem olsun. Bu durumda örneklemin ortak olasılık yoğ. fonk.

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \text{ ol}$$

Örnek: $X_1, \ldots, X_n$, n birimlik örneklem

$T_1(\underset{\sim}{X}) = T_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum X_i = \overline{X}_n$, örneklem ort.

$T_2(\underset{\sim}{X}) = T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X}_n)^2 = S_n^2$, örnekl varyan

$T_3(\underset{\sim}{X}) = T_3(X_1, \ldots, X_n) = \max_{1\leq i\leq n}\{X_i\} = X_{(n)}$

$T_4(\underset{\sim}{X}) = T_4(X_1, \ldots, X_n) = \min_{1\leq i\leq n}\{X_i\} = X_{(1)}$

birer tahmin edicidir.

$n=5$ için

$$\left.\begin{aligned} X_1(w) &= x_1 = 5 \\ X_2(w) &= x_2 = 3 \\ X_3(w) &= x_3 = 2 \\ X_4(w) &= x_4 = 1 \\ X_5(w) &= x_5 = 4 \end{aligned}\right\} \text{ gözlenmiş.}$$

$$\overline{X}_n(w) = \overline{x}_n = \frac{\sum x_i}{n} = 3$$

$$S_n^2(w) = s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x}_n)^2 = \frac{1}{4}\left[(5-3)^2 + \dots + (4-3)^2\right] = 2{,}5$$

Birer tahmindir

$$X_1(w) = x_{(1)} = \min_{1\le i\le 5}\{x_i\} = 1$$

$$X_5(w) = x_{(5)} = \max_{1\le i\le n}\{x_i\} = 5$$

Teorem: $x_1, \dots, x_n \in R$

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum x_i \quad ; \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum (x_i - \overline{x}_n)^2$$

a.) $(n-1).s_n^2 = \sum x_i^2 - n.\overline{x}_n^2$, b.) $\min_{a\in R} \sum (x_i - a)^2 = \sum (x_i - \overline{x}_n)^2$

Açık olarak yazıldığında

$$\begin{aligned} (n-1).s_n^2 &= \sum (x_i - \overline{x}_n)^2 = \sum \left[x_i^2 - 2\overline{x}_n\cdot x_i + \overline{x}_n^2\right] \\ &= \sum x_i^2 - 2.\overline{x}_n\cdot\sum x_i + n.\overline{x}_n^2 \\ &= \sum x_i^2 - 2.\overline{x}_n.\cancel{n}.\frac{\sum x_i}{\cancel{n}} + n.\overline{x}_n^2 \\ &= \sum x_i^2 - 2.n.\overline{x}_n^2 + n.\overline{x}_n^2 = \sum x_i^2 - n.\overline{x}_n^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$f(a) = \sum (x_i - a)^2$ fonk. tanımlansın ve minimumu yapan a değeri bulalım.

1. türev sıfır olduğu yerde fonk. minimum veya max. olur.
2. türev, + ise bu değer minimumdur.

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x} = -2.\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0$$

$$\Rightarrow -2.\sum x_i + 2.n.a = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x}_n$$ → noktası min. yada Max. dır

ikinci türev

$$\left.\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}\right|_{a=\overline{x}_n} = 2n > 0$$ old. için $a = \overline{x}_n$ noktası minimuma sahiptir.

• Teorem : $X_1, \ldots, X_n$, μ ve σ^2'li bir kitleden örneklem olsun.

a.) $E(\overline{X}_n) = \mu$, b.) $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, c.) $E(S_n^2) = \sigma^2$

ispat : a.) Beklenen değer operatörünün lineer olmasından dolayı,

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(x_i) = \frac{1}{n}\sum \mu = \frac{n.\mu}{n} = \mu$$

b.) Benzer olarak,

$$V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}.\sum V(x_i) = \frac{n.\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$ //

c.) $$E(S_n^2) = E\left[\frac{1}{n-1}.\sum(x_i - \overline{x}_n)^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum(x_i^2 - 2.\overline{x}_n \sum x_i + \overline{x}\right.$$

$$-2.n\overline{x}_n^2 + n\overline{x}_n^2$$

$$= \frac{1}{n-1}.E\left[\sum x_i^2 - n\overline{x}_n^2\right] = \frac{1}{n-1}.\left[\sum E(x_i^2) - n.E(\overline{x}_n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}.\left[n.(\sigma^2 + \mu^2) - n.\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}.\left[n\sigma^2 + \cancel{n\mu^2} - \cancel{n\mu^2} - \sigma^2\right]$$

$$= \frac{(n-1).\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$ //

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$[E(\overline{x})]^2 = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$

$[E(\overline{x})]^2 = \cancel{V(\overline{x})}\ E(\cancel{\overline{x}^2}) + V(\overline{x})$