TAHMİN EDİCİLERİN ÖZELLİKLERİ

1 – Yansızlık (Unbiasedness)

$x_1, \ldots, x_n$; $f(x;\theta)$ fonksiyonundan rasgele örneklem olmak üzere, bu değişkenlerin bir fonksiyonu olan

$$\hat{\theta} = h(x_1, \ldots, x_n)$$

tahmin edicisinin yansız olması için

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

olmalı.

Eğer $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ ise yanlı tahmin edici olur ve yanlılık miktarı

$$Yan(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

kadardır.

<u>Örnek</u>: $f_Y(y;\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 \le y \le \theta$

düzgün dağılımından örneklem alınsın. θ'nın iki farklı tahmin edicisi; Momentler tahmini $\hat{\theta}_1 = \frac{2}{n}\sum Y_i = 2\cdot\bar{Y}$, EGOT tahmini ; $\hat{\theta}_2 = Y_{max}$ } Bu tahmin ediciler yansız mıdır?

$$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{2}{n}\sum Y_i\right) = \underbrace{\frac{2}{n}\sum E(Y_i)}_{\text{Belli. değ. lin. özelliği}} = \frac{2}{n}\cdot n\frac{\theta}{2} = \theta \quad // \quad \hat{\theta}_1 \text{ yansız.}$$

$$E(y) = \int_0^\theta y\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^\theta = \frac{\theta}{2} \quad //$$

$\hat{\theta}_2 = Y_{max}$, idi. Önce bunun beklenen değerini bulmak için o.y.f. si

$$f_{Y_{(n)}}(y) = \frac{n!}{(i-1)!\cdot(n-i)!}\cdot f(y)\cdot[F(y)]^{i-1}\cdot[1-F(y)]^{n-i} \quad i=n$$

$$\text{burada}, \; F(y) = \int_0^y \frac{1}{\theta}\cdot dy = \frac{y}{\theta}\Big|_0^y = \frac{y}{\theta} \quad //$$

$$\Rightarrow f_{Y_{(n)}}(y) = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\left[1-\frac{y}{\theta}\right]^0$$

$$= \frac{n}{\theta}\cdot\frac{y^{n-1}}{\theta^{n-1}} = \frac{n}{\theta^n}\cdot y^{n-1} \quad // \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}_2) = E(Y_{max}) = \int_0^\theta y \cdot f_{Y_{max}}(y) \cdot dy$$

$$= \int_0^\theta y \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot y^{n-1} \cdot dy = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{(n+1)} \cdot \theta$$ elde edilir.

Böylece $E(\hat{\theta}_2) = \frac{n}{(n+1)} \cdot \theta \neq \theta$ yansız değildir

Bunu yansız tahmin edici yapabiliriz. Yeni bir $\hat{\theta}_3 = \frac{(n+1)}{n} \cdot Y_{max}$ tanımlarsak,

$$E(\hat{\theta}_3) = E\left(\frac{n+1}{n} \cdot Y_{max}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot E(Y_{max})$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}} \cdot \theta = \theta$$

$\hat{\theta}_3$ yansız olur.

Örnek: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 nin EGOT tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{Y}^2 = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{Y}^2}{n}$$ yansız mıdır?

$$E(\bar{Y}) = E\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum E(Y_i) = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

$$V(\bar{Y}) = V\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum V(Y_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

bunlardan yararlanarak,

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot E\left\{\sum (y_i^2 - 2 y_i \bar{y} + \bar{y}^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot E\left[\sum y_i^2 - 2\bar{y} \cdot \sum y_i + n \cdot \bar{y}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot E\left[\sum y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \left\{\sum E(y_i^2) - n \cdot E(\bar{y}^2)\right\}$$

bu terimler hesaplanırsa

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 \Rightarrow E(y^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y}^2) - [E(\bar{y})]^2 \Rightarrow E(\bar{y}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

yukarıda yazılırsa,

$$\Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\left[\sum E(y^2) - n \cdot E(\bar{y}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{\cancel{n} \cdot (\sigma^2 + \mu^2)}{\cancel{n}} - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)\cdot\sigma^2}{n}$$

Yani örneklem varyansı $s^2 (= \hat{\sigma}^2)$, σ^2 nın yansız tahmin edicisi değildir.

$\frac{n}{(n-1)} \cdot \hat{\sigma}^2$ olursa yansız olur.

Yani

$$\frac{n}{(n-1)} \cdot \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{\sum y_i^2 - n \cdot \hat{\bar{y}}^2}{(n-1)}$$

biçimindeki yeni tahmin edici (s^2), σ^2 nın yansız tahmin edicisidir.

Örnek: $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (Y_i - \bar{Y})^2$, σ^2 parametresinin yanlı bir tahmin edicisidir.

μ bilindiğinde

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (Y_i - \mu)^2$$

tahmin edicisinin σ^2 için yansız old. göst?

$E(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma^2$ olmalı. Tanımdan,

$\boxed{V(Y) = E(Y-\mu)^2 = \sigma^2}$ dir

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{n} E\left(\sum^n (Y_i - \mu)^2\right) = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n E(Y_i - \mu)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sigma^2 = \sigma^2 //$$

Örnek: $Y_1, \ldots, Y_n$, $f_Y(y;\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}}$, $y > 0$

a.) $\hat{\theta}_1 = n \cdot Y_{min}$ tahmin edicisi θ için yansızmı.

b.) $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum Y_i$ " " " "

Çözüm: a.) önce Y_{min} sıra ist. o.y.f. si.

$$f_{Y_{(i)}}(y) = \binom{n}{i} \cdot f(y) \cdot [F(y)]^{i-1} \cdot [1 - F(y)]^{n-i}$$

i için

burada

$$F_{Y_{min}}(y) = P(\cancel{Y_{min}} \leq y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} \cdot dy$$

$$= -e^{-\frac{y}{\theta}} \Big|_0^y = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}} //$$

$i=1$

$$= \frac{n!}{(1-1)! \cdot (n-1)!} \cdot f(y) \cdot \underbrace{\left[1 - e^{-\frac{y}{\theta}}\right]^{1-1}}_{=0} \cdot \left[1 - 1 + e^{-\frac{y}{\theta}}\right]^{n-1}$$

$$= n \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} \cdot e^{-(n-1) \cdot \frac{y}{\theta}} = \frac{n}{\theta} \cdot e^{-\frac{n}{\theta} \cdot y}, \quad y > 0$$

olur.

$$f_{Y_{min}}(y) = \frac{n}{\theta} \cdot e^{-\frac{n}{\theta} \cdot y} \quad , \quad y > 0$$

Bu ifadeye göre Y_{min} sıra ist. $\frac{n}{\theta}$ parametresi ile üstel dağılıma sahiptir.

Buna göre, $E(Y_{min}) = \frac{1}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta}{n}$ olur.

Böylece, $E(\hat{\theta}_1) = E(n \cdot Y_{min}) = n \cdot E(Y_{min}) = n \cdot \frac{\theta}{n} = \theta$

yani $\hat{\theta}_1 = n \cdot Y_{min}$, θ için yansızdır.

b.) $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum Y_i$

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{1}{n} \sum Y_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(Y_i) = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta$$

$\hat{\theta}_2 = \bar{Y}$ 'de θ için yansız tahmin edicidir.

Not: $\hat{\theta}_n = h(x_1, \ldots, x_n)$ tahmin edicisi θ parametresinin, asimtotik olarak yansız tahmin edicisi olabilmesi için

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

olmalı.

Önceki örnekte, (μ, σ^2), σ^2 iç

$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \bar{Y})^2$, $E(\hat{\theta}_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$ idi. yanlı

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \sigma^2 = \sigma^2$$ old. da

$\hat{\theta}_n$ tahmin edicisi yanlı ama asimtotik olarak yansızdır.