2- Etkinlik (Efficiency)

$\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$, θ parametresinin yansız iki tahmin edicisi olmak üzere, bunlardan hangisinin tercih edileceğine karar vermek için hangisinin daha etkin olduğuna bakılır.

$$\boxed{V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2) \Rightarrow \hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2\text{'dan daha etkin}}$$

Göreli Etkinlik: Tahmin edicilere ait varyansların oranıdır. $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$; θ'nın yansız iki tahmin edicisi ise $\hat{\theta}_1$'nın, $\hat{\theta}_2$'ya göreli etkinliği,

$$G.E. = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}, \quad GE \leq 1 \text{ ise } \hat{\theta}_2 \text{ daha etkindir.}$$

Örnek: $Y_1, \ldots, Y_n$; $f(y;\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 \leq y \leq \theta$

$\hat{\theta}_1 = \frac{2}{n}\sum Y_i$

$\hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot Y_{max}$

Yansız tahmin edicilerden hangisi daha etkindir.

$$E(Y) = \int_0^\theta y \cdot \frac{1}{\theta} \cdot dy = \left.\frac{y^2}{2\theta}\right|_0^\theta = \frac{\theta^2}{2\theta} = \frac{\theta}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^\theta y^2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot dy = \left.\frac{y^3}{3} \cdot \frac{1}{\theta}\right|_0^\theta = \frac{\theta^2}{3}$$

$$V(Y) = \frac{\theta^2}{3} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{4\theta^2 - 3\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

$i=n$, Y_{max} sıra ist. o.y.f.si

$$f_{Y_{max}}(y) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \cdot f(y) \cdot [F(y)]^{i-1} \cdot [1-F(y)]^{n-i}$$

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} \cdot dy = \frac{y}{\theta}$$

$$\Rightarrow f_{Y_{(n)}}(y)=\frac{n!}{(n-1)!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\left[1-\frac{y}{\theta}\right]^{0}$$

$$=\frac{n}{\theta^{n}}\cdot y^{n-1},\ 0<y<\theta$$

$$\cancel{E(\hat{\theta})=E\left(\frac{2}{n}\sum Y_i\right)=\frac{2}{n}\cdot\sum E(Y_i)=\frac{2}{n}\cdot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{n}}$$

$$V(\hat{\theta}_1)=V\left(\frac{2}{n}\sum Y_i\right)=\frac{4}{n^2}\cdot\sum V(Y_i)=\frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$$

$$E(Y_{max})=\int_0^{\theta} y\cdot f_{Y_{max}}(y)\cdot dy$$

$$=\int_0^{\theta} y\cdot\frac{n}{\theta^n}\cdot y^{n-1}\cdot dy=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\theta}=\frac{n}{(n+1)}\cdot\theta$$

$$E(Y_{max}^2)=\int_0^{\theta} y^2\cdot\frac{n}{\theta^n}\cdot y^{n-1}\cdot dy=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{y^{n+2}}{n+2}\Big|_0^{\theta}=\frac{n}{(n+2)}\cdot\theta^2$$

$$\Rightarrow V(Y_{max})=\frac{n}{(n+2)}\cdot\theta^2-\left[\frac{n}{(n+1)}\cdot\theta\right]^2$$

$$=n\cdot\theta^2\cdot\left(\frac{1}{n+2}-\frac{n}{(n+1)^2}\right)$$

$$=n\cdot\theta^2\cdot\left(\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)\cdot(n+1)^2}\right)=\frac{n\cdot\theta^2}{(n+2)\cdot(n+1)^2}$$

buradan; $V(\hat{\theta}_2)=V\left(\frac{(n+1)}{n}\cdot Y_{max}\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot V(Y_{max})$

$$=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n\cdot\theta^2}{(n+2)\cdot(n+1)^2}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

G.E. =

$$\Rightarrow \frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)}=\frac{\theta^2/3n}{\theta^2/n(n+2)}=\frac{n+2}{n}$$

, $n>1$ için $V(\hat{\theta}_1)>V(\hat{\theta}_2)$, $\hat{\theta}_2$ daha etkin.

Örnek: $X_1, \ldots, X_n$ Poisson dağılımlı örn

$\hat{\lambda}_1 = X_1$, $\hat{\lambda}_2 = \bar{X}$ tahmin edicileri λ için yansız mı, etkinlikleri?

$$f_{X_i}(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{(x_i)!}, \quad x_i = 0, 1, \ldots; \quad i = 1, \ldots, n$$

$$E(X_i) = V(X_i) = \lambda.$$

$$E(\hat{\lambda}_1) = E(X_1) = \lambda$$

$$E(\hat{\lambda}_2) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \lambda = \lambda$$

$\hat{\lambda}_1$ ve $\hat{\lambda}_2$ yansızdır.

Hangisi daha etkindir.

$$V(\hat{\lambda}_1) = V(X_1) = \lambda$$

$$V(\hat{\lambda}_2) = V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum V(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

$V(\hat{\lambda}_2) < V(\hat{\lambda}_1)$ old. için $\hat{\lambda}_2$ daha etkin.

3- En Küçük Varyanslı Tahmin Ediciler:

θ parametresinin tüm yansız tahmin ediciler arasında varyansı en küçük olan tahmin ediciye "minimum varyanslı veya en iyi" tahmin edici denir.

θ parametresinin yansız tüm tahmin edicilerinin ~~alt~~ varyansına ait bir alt sınır bulmak için Rao-Cramer eşitsizliği kull.

Teorem (Cramer-Rao eşitsizliği): (CR)

$X_1, \dots, X_n$; θ parametresi ile $f(x;\theta)$ dağılımından rasgele örneklem olsun. θ'nın $\hat{\theta} = H(X_1, \dots, X_n)$ olmak üzere yansız tahmin edicisi CR eşitsizliği şöyle tanımlanır.

$$\boxed{V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n.E\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2}}$$

$\hat{\theta}$ yansız tahmin edicinin varyansına ait alt sınır bulmayı sağlar. Sağ taraftaki paydaya örneklem bilgisi denir. Varyans ne kadar küçük ise örneklem bilgisi o kadar çoktur.

— Yanlı tahmin ediciler için etkinlik karşılaştırması yapılmak istenirse, varyans yerine "Hata Kareler Ortalaması" (HKO) kullanılır. HKO'si küçük olan tahmin edici tercih edilir. Şöyle;

$$\boxed{HKO(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]}$$

Varyans, $\left[V(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2\right]\right]$, $\hat{\theta}$'nın kendi beklenen değeri etrafındaki yayılımını ölçerken, HKO, $\hat{\theta}$'nın gerçek değeri etrafındaki yayılımını ölçer.

$$\boxed{V(\hat{\theta}) + \left[Yan(\hat{\theta})\right]^2 = HKO(\hat{\theta})}$$

Yansız $\hat{\theta}$ için $V(\hat{\theta}) = HKO(\hat{\theta})$ $\quad$ $Yan(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

Asimtotik Normallik

Tahmin edicilerin dağılımları istatistiki sonuç çıkarımı için çok önemlidir. Bunun için de normallik çok önemlidir. Tahmin edicilerin dağılımları normal olmasa bile, Merkezi Limit Teoremine (MLT) göre limit durumunda normallik elde edilebilir.

$X_1, \dots, X_n$; μ ve σ^2 olan bir kitleden örneklem ise MLT ye göre

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \xrightarrow{D} N(0,1)}$$

olup $\bar{X}_n$ asimtotik normaldir denir.

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X}_n \sim AN\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Örnek: $X_1, \dots, X_n$ örneklemi için yansız $\hat{\theta}_1$ tahmin edicisi, $V(\hat{\theta}_1) = 4$, ve yanlı $\hat{\theta}_2$ tahmin edicisi için, $V(\hat{\theta}_2) = 2$

$Yan(\hat{\theta}_2) = E(\hat{\theta}_2) - \theta = 2$ olsun. Hangi tahmin edici daha iyidir.

$$\left.\begin{aligned} HKO(\hat{\theta}_1) &= V(\hat{\theta}_1) + [Yan(\hat{\theta}_1)]^2 = 4 + 0 = 4 \\ HKO(\hat{\theta}_2) &= V(\hat{\theta}_2) + [Yan(\hat{\theta}_1)]^2 = 2 + 4 = 6 \end{aligned}\right\}$$

HKO'su küçük olan $\hat{\theta}_1$ seçilir daha iyidir. (etkin)