Üretici Fonksiyonlar

1. Moment Çıkaran Fonksiyon:

X'in M.Ç.F. si $t \in \mathbb{R}$ için $M_X(t) = E(e^{t.X})$

MÇF yardımıyla, var olması halinde t.d.nin bütün momentleri bulunabilir.

$e^{t.X}$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımından

$$e^{t.X} = 1 + \frac{t.X}{1!} + \frac{(t.X)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow E(e^{t.X}) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t.X)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) \text{ olur.}$$

Yani t.d.nin bütün momentleriyle MÇF arasında bir ilişki vardır.

Örnek:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

$t < 1$ için X'in MÇF'si

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} . e^{-x} . dx$$

$$= \int e^{-x.(1-t)} . dx = -\frac{1}{1-t} . e^{-x.(1-t)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= e^{-\infty} + \frac{e^0}{1-t} = \frac{1}{1-t} \,//$$

Rasgele değişkenin momentleri,

$$M'_X(t) = E(X . e^{tX}) \Rightarrow M'_X(t=0) = E(X) = \mu$$

$$M''_X(t) = E(X^2 . e^{tX}) \Rightarrow M''_X(t=0) = E(X^2) = m_2$$

$$\vdots$$

$$M_X^{(k)}(t) = E(X^k . e^{tX}) \Rightarrow M_X^{(k)}(t) = E(X^k) = m_k$$

Böylece, $M_x(t) = \frac{1}{1-t}$ idi,

$$M'_x(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \Rightarrow M'_x(t=0) = 1 \,//$$

$$\Rightarrow M''_x(t) = \frac{2\cdot(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{2}{(1-t)^3}$$

$$M''_x(t=0) = 2 \,//$$

Sonuç, $V(X) = 2 - 1^2 = 1 \,//$

11.02.2016

---

2. Kümülant Üreten Fonksiyon:

X t.d.nin MGF'si var ve $M_x(t)$ olsun.

X'in kümülant üreten fonksiyonu,

$$K_n(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \ln\left(M_x(t)\right)$$

X'in MGF'si bilindiğinde n.nci kümülant

$$K_n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \ln\left(M_x(t)\right)\Big|_{t=0}$$

Örnek: $p(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}$, $\lambda > 0$, $x = 0,1,\ldots$

$M_x(t) = E(e^{tX}) = e^{\lambda\cdot(e^t-1)}$ olup

Kümülant üreten fonksiyon

$$K_n(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \ln\left(M_x(t)\right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \ln\left(e^{\lambda\cdot(e^t-1)}\right)$$

$$= \lambda\cdot e^t$$

$n \in \mathbb{N}$ için kümülantlar

$$K_n = \lambda\cdot e^t\Big|_{t=0} = \lambda \,//$$

3. Karakteristik Fonksiyon:

Bir t.d. nin MGF'si her zaman olmayabilir. Ama karakteristik fonksiyonu daima vardır. Bu fonksiyon biliniyor ise olasılık fonksiyonu bulunabilir. $i=\sqrt{-1}$, $t\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Phi_X(t)=E(e^{itx})=\begin{cases}\sum\limits_{x\in D_x} e^{itx}\,p(x) & \text{kesikli}\\ \int\limits_{x\in D_x} e^{itx}\,f(x)\,dx, & \text{sürekli}\end{cases}$$

Momentler,

$$\boxed{E(X^k)=\frac{\partial^k}{i^k\cdot\partial t^k}\Phi_X(t)\Big|_{t=0}}$$

Örnek: X t.d., $\beta>0$ için

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}\cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0\\ 0, & \text{d.h.}\end{cases}$$

X'in karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi_X(t)=E(e^{itx})=\int_0^\infty e^{itx}\,\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{-x\cdot(1-it\beta)/\beta}\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{-e^{-x\cdot(1-it\beta)/\beta}}{\frac{(1-it\beta)}{\beta}}\Bigg|_0^\infty$$

$$=0+\frac{e^0}{(1-it\beta)}=(1-it\beta)^{-1}$$

$$E(X)=\frac{\partial}{i\cdot\partial t}\cdot\Phi_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{i}\cdot\frac{i\beta}{(1-it\beta)^2}\Bigg|_{t=0}=\beta$$

$$E(x^2) = \frac{\partial^2}{i^2 \partial t^2} \Phi_x(t) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{i^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i \cdot \beta}{(1 - i \cdot t \beta)^2} \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{i^2} \left[\frac{2 \cdot i^2 \cdot \beta^2 \cdot (1 - i t \beta)}{(1 - i t \beta)^4} \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{2 \cdot \beta^2}{(1 - i t \beta)^3} \Big|_{t=0} = 2 \cdot \beta^2$$

Böylece, $V(X) = E(x^2) - [E(X)]^2 = 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$

Örnek : $f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y^2, & 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0, & d.h. \end{cases}$

a.) $c = ?$

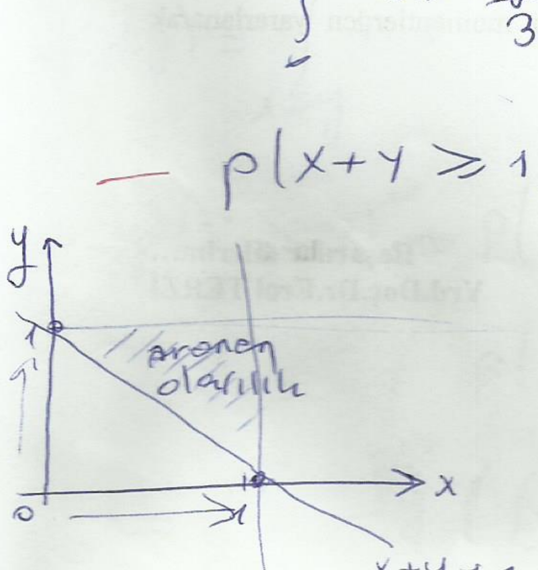
b.) $P(X+Y \geq 1)$, $P(0 < X < 0{,}75) = ?$

— $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} c \cdot x \cdot y^2 \, dy \, dx = 1$$

$$\int_0^1 c \cdot x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{c}{3} x \cdot dx = c \cdot \frac{x^2}{6} \Big|_0^1$$

$$= \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow c = 6$$

— $$P(X+Y \geq 1) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=1-x}^{1} 6 \cdot x \cdot y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 6x \frac{y^3}{3} \Big|_x^1$$



$$= \int_0^1 \frac{6x}{3} \cdot (1 - x^3) \cdot dx = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$