4. X, ~~t.d.~~ $E(X)=\mu$ ve $V(X)=\sigma^2$ olan bir t.d. ise,

$$V(X)=\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-\mu^2$$

olduğunu gösteriniz.

<u>Çözüm:</u> Varyans tanımından,

$$V(X)=E[(X-\mu)^2] \quad \text{idi.}$$

$$\Rightarrow =E(X^2-2X.E(X)+[E(X)]^2)$$

$$=E(X^2)-2.E(X).E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2 \text{ bulunur.}$$

5. Düzgün bir paranın üç kez atılması örneğini düşünelim (ör. 2). X' t.d. nin varyansını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> X için olasılık tablosu,

$X=x$	0	1	2	3
$f(x)=p(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$\Rightarrow V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

burada önce,

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{3}x.p(X=x)=0.\frac{1}{8}+1.\frac{3}{8}+2.\frac{3}{8}+3.\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{3}x^2.p(X=x)=0^2.\frac{1}{8}+1^2.\frac{3}{8}+2^2.\frac{3}{8}+3^2.\frac{1}{8}$$

$$=\frac{24}{8}=3$$

Böylece,

$$V(X)=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \text{ elde edilir.}$$

6. X t.d. nin o.f. si $f(x)=c.e^{-x}$, $x=1,2,\ldots$ olsun. c sabitini bulunuz?

$p(X\leq 2)=?$

Çözüm: $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$ olmalıdır.

$$\Rightarrow c.(e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n} + \dots) = 1$$

$$\Rightarrow c.e^{-1}.(1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots) = 1$$

burada parantez içindeki ifade, geometrik serinin toplamı olup,

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$$ dir.

$$\Rightarrow c.e^{-1}.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\right) = 1$$

$$\Rightarrow c.\frac{1}{\cancel{e}}.\left(\frac{\cancel{e}}{e-1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{c = e - 1}$$ bulunur.

$p(X \leq 2) = ?$
$= p(X=1) + p(X=2)$
$= (e-1).e^{-1} + (e-1).e^{-2}$ //

$e = 2,7172\dots$

7. X t.d. nin o.y.f. si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

veriliyor. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a.) $p(0.5 < X < 1.5)$, b.) $p(X < 0.75)$

Çözüm: a.) $p(0.5 < X < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$

$$= \int_{0.5}^{1.5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.x \Big|_{0.5}^{1.5} = \frac{1}{2}.(1.5 - 0.5)$$

$$= \frac{1}{2} //$$

b.) $p(X < 0.75) = \int_{0}^{0.75} \frac{1}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}x \Big|_{0}^{0.75} = \frac{3}{8} //$$

8. X sürekli t.d. nin o.y.f. si f(x) veriliyor. X'in beklenen değerini bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-x) & , \quad 0 < x < 3 \\ 0 & , \quad d.h. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^3 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^3 x \cdot \frac{2}{9}(3-x)\, dx$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \frac{2}{9} \cdot \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{27}{2} - 9\right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2} = 1 \,//$$

9. X t.d. için o.y.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} \cdot (2x+1) & , \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{18} \cdot (7-x) & , \quad 2 < x \leq 6 \\ 0 & , \quad d.h. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{18} \cdot (2x+1)\, dx + \int_2^6 x \cdot \frac{1}{18} (7-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \int_0^2 (2x^2 + x)\, dx + \frac{1}{18} \cdot \int_2^6 (7x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{7}{2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^6$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{16}{3} + 2\right) + \frac{1}{18} \cdot \left[\left(\frac{7}{2} \cdot 36 - \frac{216}{3}\right) - \left(\frac{28}{2} - \frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{22}{54} + \frac{1}{18} \cdot \left[\left(\frac{252}{2} - \frac{216}{3}\right) - \left(\frac{68}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{22}{54} + \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{324}{6} - \frac{68}{6}\right)$$

$$= \frac{22}{54} + \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{256}{6}\right) = \frac{22}{54} + \frac{128}{54} = \frac{150}{54} = 2{,}77 \,//$$

10. X kesikli t.d. nin o.f. i

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10\cancel{x}+5}{30} & , \quad x=0,1 \\ \frac{25-8x}{30} & , \quad x=2,3 \\ 0 & , \quad d.h. \end{cases}$$

a.) $V(\cancel{X})$ ve σ_x'i bulunuz.

b.) $Y=5X+4$ t.d. nin varyans ve st. sapm bulunuz.

Çözüm: a.) $V(x) = E(x^2) - \mu_x^2$, $E(X) = \mu_x$

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i \cdot f(x_i) + \sum_{i=2}^{3} x_i \cdot f(x_i)$$

$$= 0.\cancel{x}\left(\frac{+5}{30}\right) + 1.\frac{15}{30} + 2.\frac{9}{30} + 3.\frac{1}{30} = \frac{36}{30} = 1,2$$

$$E(x^2) = \sum_{i=0}^{1} x_i^2 . f(x_i) + \sum_{i=2}^{3} x_i^2 . f(x_i)$$

$$= 0^2.\frac{5}{30} + 1^2.\frac{15}{30} + 2^2.\frac{9}{30} + 3^2.\frac{1}{30} = \frac{60}{30} = 2$$

$$V(X) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 2 - (1,2)^2 = 2 - (1,44) = 0,56$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,56} = 0,74$$

b.) $V(Y) = V(5X+4) = 5^2 . V(X)$

$$= 25.(0,56) = 14$$

$$\sigma_y = \sqrt{14} = 3,74$$