

MAT 209 OLASILIK ALIŖTIRMALAR II ve ÇÖZÜMLERİ

1) 3 para atıldığında gelen yazı sayısı X Ŗans deđiŖkeni ile gösterildiğine göre olasılık fonksiyonu nedir?

ÇÖZÜM: Örnek uzayı {YYY,YYT,ITY,TYY,TTY,ITY,ITT,TTT} olup X in deđer kümesi {0,1,2,3} olur.

x	0	1	2	3
f(x)=P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$2) f(x) = \begin{cases} cx, & x = 0,2,3,4,5 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olasılık fonksiyonu veriliyor.

a) c yi bulunuz

b) F(x) i bularak grafiđini çiziniz

ÇÖZÜM: a) $c \geq 0$ ve $f(x) \geq 0$

$$\sum_{x=0,2,3,4,5} f(x) = 1 \Rightarrow c \cdot 0 + c \cdot 2 + c \cdot 3 + c \cdot 4 + c \cdot 5 = 1$$
$$\Rightarrow 14c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{14}$$

Buna göre $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{14}, & x = 0,2,3,4,5 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$

Ŗeklindedir.

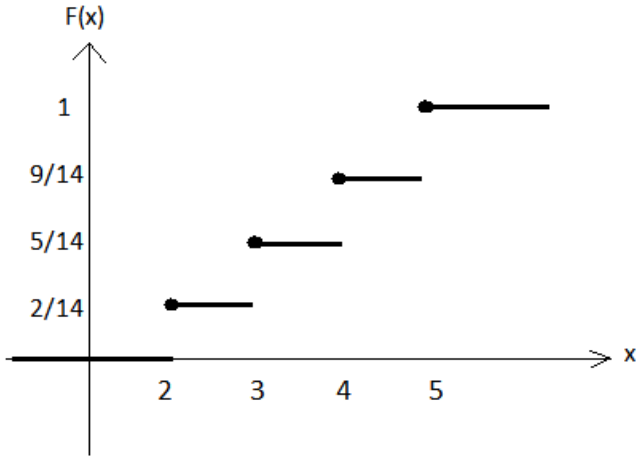
b)

x	0	2	3	4	5
F(x)	0	2/14	5/14	9/14	1

Buna göre F(x) aŖađıdaki Ŗekilde ifade edilebilir:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sum x}{14}, & x = 0,2,3,4,5 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

F(x) in grafik gösterimi ise aŖađıdaki Ŗeklindedir:



3) Sürekli X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 < x < 1 \\ x, & \text{diğer} \end{cases}$$

ile verilmektedir. Buna göre

a) c sabitinin değerini bulunuz

b) F(x) i oluşturunuz.

c) $P\left(X \geq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{3}{4}\right)$ olasılığını hesaplayınız

ÇÖZÜM: a) f(x)'in bir X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için

i) $f(x) \geq 0$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 c(x-1)dx = 1 \Rightarrow c \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow c = 6$$

$$b) F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) P\left(X \geq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(X \leq \frac{3}{4}\right)} = \frac{6 \int_{1/2}^{3/4} x(1-x)dx}{6 \int_0^{3/4} x(1-x)dx} = \frac{11}{27}$$

diğer bir çözüm olarak;

$$P\left(X \geq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(X \leq \frac{3}{4}\right)} = \frac{F(3/4) - F(1/2)}{F(3/4)} = \frac{11}{27}$$

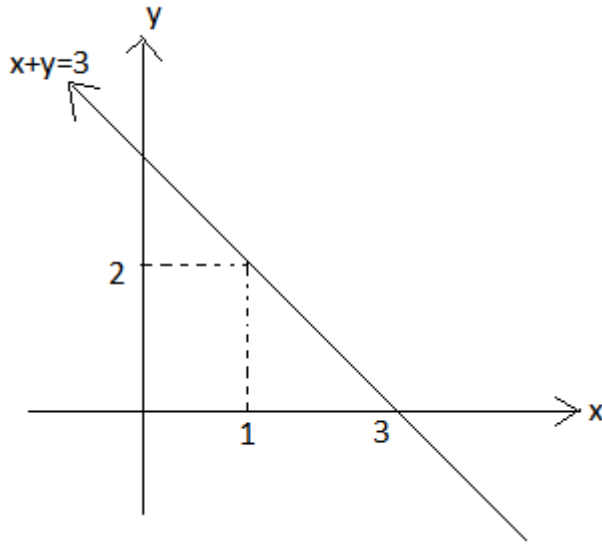
$$4) f(x, y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 \leq x \leq 2, 2 < y \leq 4 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$f(x, y)$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için k ne olmalıdır? Buna göre $P(X+Y \leq 3)$ olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 0 \text{ olmalı. Buradan;}$$

$$\int_0^2 \int_2^4 k(6 - x - y) dy dx = 1 \Rightarrow k \int_0^2 (6 - x^2) dx = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$



$$\int_{x=0}^1 \int_{y=2}^{3-x} \frac{1}{8} (6 - x - y) dy dx = \frac{5}{24} \quad \text{veya} \quad \int_{x=2}^{3-y} \int_{y=0}^1 \frac{1}{8} (6 - x - y) dy dx = \frac{5}{24}$$

5) X ve Y şans değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, y < 0 \\ \frac{x^2 y + y^2 x}{2}, & x > 0, y < 1 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

a) $f(x,y)$ fonksiyonunu bulunuz

b) $P\left(X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y \leq 1\right)$ olasılığını hesaplayınız?

ÇÖZÜM

$$a) f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) = x + y$$

$$b) P\left(X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y \leq 1\right) = \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 (x+y) dy dx = 1/4$$

6) Ortak dağılım fonksiyonu

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - 2^{-x})(1 - 2^{-y}), & x = 1,2, \dots \text{ ve } y = 1,2, \dots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan X ve Y rassal değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz. Bundan yararlanarak marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$F(x, \infty) = G(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} (1 - 2^{-x}) & x = 1,2, \dots \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$F(-\infty, y) = H(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} (1 - 2^{-y}) & y = 1,2, \dots \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

bulunur. Marjinal olasılık fonksiyonları için,

$$\frac{d}{dx} F_x(x) = g(x) = \begin{cases} 2^{-x} & , \quad x = 1,2, \dots \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dy} F_y(y) = h(y) = \begin{cases} 2^{-y} & , \quad y = 1,2, \dots \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

bulunur.

$$7) f(x,y) = \begin{cases} kxy, & x = 0,1,2 \text{ ve } y = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

i) $f(x,y)$ fonksiyonunun, (X,Y) rassal değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu olması için k ne olmalıdır?

ii) X ve Y rassal değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

iii) $P(1 \leq X \leq 2, 1 \leq Y \leq 2)$ olasılığını bulunuz

ÇÖZÜM:

$$i) \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^3 f(x,y) = 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^3 kxy = k \sum_{x=0}^2 x \sum_{y=0}^3 y = k \sum_{x=0}^2 x(0+1+2+3) = k \sum_{x=0}^2 6x = 6k(0+1+2) = 18k$$

$$\Rightarrow 18k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{18}$$

$$ii) g(x) = \sum_{y=0}^3 \frac{1}{18} xy = \frac{1}{18} x(0+1+2+3) = \frac{1}{3} x \quad x = 0,1,2$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$h(y) = \sum_{x=0}^2 \frac{1}{18} xy = \frac{1}{18} y(0+1+2) = \frac{1}{6} y \quad y = 0,1,2,3$$

$$\Rightarrow h(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y & y = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$iii) P(1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2) = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^2 \frac{1}{18} xy = \frac{1}{18} \sum_{x=1}^2 x(1+2) = \frac{3}{18} \sum_{x=1}^2 x = \frac{3}{18} (1+2) = \frac{1}{2}$$

8) X ve Y rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

veriliyor.

i) X rassal değişkeninin marginal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz

ii) Y rassal değişkeninin marginal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz

$$\text{ÇÖZÜM: } i) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^{\infty} xe^{-(x+y)} dy = xe^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$ii) h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{\infty} xe^{-(x+y)} dx = e^{-y} \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = e^{-y}$$

$$h(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

9) X ve Y rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 + y, & 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre

i) $P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$ olasılığını bulunuz.

ii) $P(Y \leq X + 1)$ olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$i) P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \int_{x=0}^{\frac{2}{3}} \int_{y=0}^{1-x^2} \left(\frac{5}{4}x^2 + y\right) dy dx = \frac{5}{4} \int_{x=0}^{\frac{2}{3}} \left(x^2y + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^{1-x^2} dx$$

$$= \frac{5}{8} \int_{x=0}^{\frac{2}{3}} (1 - x^4) dx = \frac{5}{8} \left(x - \frac{x^5}{5}\right) \Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{12} \left(5 - \frac{16}{81}\right) = 0,4$$

$$ii) P(Y \leq X + 1) = 1 - P(Y > X + 1) = 1 - \int_{x=-1}^0 \int_{y=x+1}^{1-x^2} \left(\frac{5}{4}x^2 + y\right) dy dx$$

$$= 1 - \frac{5}{4} \int_{x=-1}^0 \left(\frac{5}{4}x^2 + y\right) \Big|_{x+1}^{1-x^2} dx = 1 - \frac{5}{8} \int_{x=-1}^0 (-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x) dx$$

$$= 1 - \frac{5}{8} \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3 - x^2\right) \Big|_{-1}^0 = 1 - \frac{5}{8} \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{16} = 0,81$$

10) (X,Y) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6 - x - y), & 0 < x \leq 2, 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

veriliyor. Aşağıdakileri bulunuz

i) E(X) ii) E(Y) iii) E(X+Y) iv) E(XY)

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \text{i) } E(X) &= \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^4 x \frac{1}{8} (6-x-y) dx dy = \frac{1}{8} \int_{x=0}^2 x dx \left(6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^4 = \frac{1}{8} \int_{x=0}^2 x(6-2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{6x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } E(Y) &= \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^4 y \frac{1}{8} (6-x-y) dx dy = \frac{1}{8} \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^4 (6y - xy - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{8} \int_{x=0}^2 \left(6 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2} \right) \Big|_2^4 dx = \frac{1}{8} \int_{x=0}^2 \left(\frac{52}{3} - 6x \right) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{52}{3} x - 6 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

$$\text{iii) } E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{5}{6} + \frac{17}{6} = \frac{11}{3}$$

$$\text{iv) } E(XY) = \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^4 xy \frac{1}{8} (6-x-y) dx dy = \frac{1}{8} \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^4 (6xy - x^2y - xy^2) dy dx = \frac{7}{3}$$