1

I. Bölüm
HAS OLMAYAN İNTEGRALLER
(Genelleştirilmiş İntegraller)

I. tür Has olmayan integraller:

f, $[a,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

f, $(-\infty, b]$ " " "

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

f, $(-\infty,\infty)$ " " "

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

integrallerine I. tür has olmayan integral denir.

Tanım: $a, A \in \mathbb{R}$ $A \geq a$ olmak üzere f, $[a,\infty)$ da tanımlı, $[a,A]$ da integrallenebilir olsun. Dolayısıyla $\int_a^A f(x)\,dx$ var olsun.

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$$ olsun. Eğer $\lim_{A\to\infty} F(A)$ limiti var ise o zaman $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ I. tür has olmayan integrali yakınsaktır denir ve

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} F(A) = \lim_{A\to\infty}\left(\int_a^A f(x)dx\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer bu limit yoksa has olmayan integraller ıraksaktır.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\left(\int_B^b f(x)\,dx\right)$$ limiti varsa int. yakınsak.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\left(\int_B^0 f(x)dx\right) + \lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\,dx$$

<u>Örnek</u>: Aş. has olmayan int. yakınsaklık ve ıraksaklık durumlarını inceleyiniz. Yakınsaklık durumunda limitlerini bulunuz.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x^2}dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{x^2+1}$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x\Big|_0^A = \tan^{-1}A - \tan^{-1}0 = \tan^{-1}A$$

$\displaystyle\lim_{A\to\infty}\left(\tan^{-1}A\right) = \frac{\pi}{2}$ limiti var old.dan int. yakınsaktır. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ dir.

Ör:

b) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$

$\int xe^{-x^2}dx$ int. de $\quad -x^2=u$

$-2xdx=du$

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A xe^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty}\Big(-\frac{1}{2\underbrace{e^{A^2}}_{\infty}}+\frac{1}{2e^0}\Big)=\frac{1}{2}$$

Verilen I. tür has olmayan integrali yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{2}$ dir.

(1) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ Tam aç 227

c) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2dx}{x^3+1} = \lim_{B\to-\infty} \int_{B}^{0} \frac{x^2dx}{x^3+1}$

$x^3+1=u$

$3x^2dx=du$

$x^2dx=\frac{du}{3}$

$\int_{B}^{0} \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3}\ln u \Big|_{B}^{0} = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big|_{B}^{0}$

$= \frac{1}{3}\cancel{\ln(1)}^{0} - \frac{1}{3}\ln(B^3+1)$

$\lim_{B\to-\infty} \int_{B}^{0} \frac{x^2dx}{x^3+1} = \lim_{B\to-\infty} -\frac{1}{3}\underbrace{\ln(B^3+1)}_{-\infty \text{ olur}}$

$= +\infty$ ıraksaktır.

∞ olur.

Teo!

Karşılaştırma Testi!

$[a,+\infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli f ve g fonksiyonları

$0 \le f(x) \le g(x)$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman

1) $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ integrali yakınsak ise $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ de yakınsaktır ve

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx \le \int_{a}^{\infty} g(x)dx$$

2) $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ ıraksak ise $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ de ıraksaktır.

Örnek! $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ int. yak. durumunu inceleyiniz.

$x \geq 1$ $\quad x^2 \geq x \quad -x^2 \leq -x \quad e^{-x^2} \leq e^{-x}$ dir.

Ayrıca;

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{A \to \infty} \int_1^{A} e^{-x}dx = \lim_{A \to \infty} \left(-e^{-x}\Big|_1^{A}\right)$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(-\underbrace{e^{-A}}_{\to 0} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

Old. dan $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ yakınsaktır. karşılaştırma testinden $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ int. de yakınsaktır ve

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{e} \text{ dir.}$$

UYARI !

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{yak.}, & \alpha > 1 \\ \text{ıraksak}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

④

Bölüm Testi:

$[a,\infty)$ aralığında negatif olmayan sürekli ve yeteri kadar büyük x'ler için $g(x)\neq 0$ koşulunu sağlayan $f(x)$ ve $g(x)$ fonks. için

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=p\neq 0 \qquad p \text{ sonlu sayı}$$

ise o zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ ve $\int_a^\infty g(x)dx$ integralleri aynı zamanda yakınsaktır veya ıraksaktır.

Örnek: $\int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+2x^2+x+5}dx$ int. yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz.

NOT! $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=p\neq 0\neq\infty \Leftrightarrow \text{Der} f(x) = \text{Der} g(x)$

Öyleyse öyle bir g fonks. belirlemeli ki $\frac{f}{g}$ işlemi uygulandığında pay ve paydanın dereceleri eşit olsun. Pratik olarak

$f(x)$ in payındaki en büyük dereceli terim ile $f(x)$ in paydasındaki max dereceli terimi oranla

Burada $\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{x}$

olup $f(x)=\frac{x^2+3}{3x^3+2x^2+x+5}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ alınmalı.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{3x^3+2x^2+x+5}=\frac{1}{3}=p\neq 0$$

teo gereğince $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ile $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

karakterleri aynıdır.

UYARI $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{yak}, & \alpha > 1 \\ \text{Irak.} & \alpha \leq 1 \end{cases}$

Burada $\alpha = 1$ durumu var öyleyse $\int_1^\infty g(x)\,dx$ ıraksak

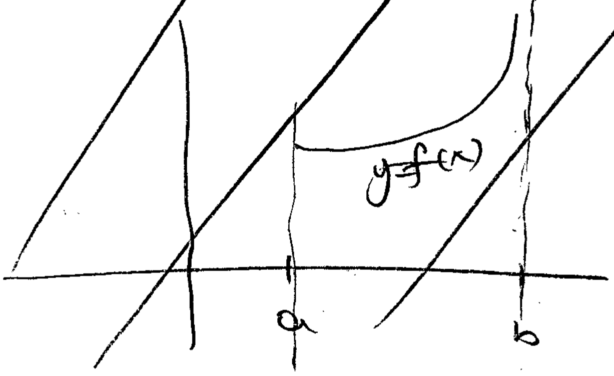
olup $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ıraksak olur.

• **NOT:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ olsun. $g(x)$ ıraksak $\Rightarrow$ $f(x)$ ıraksaktır.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $g(x)$ yakınsak $\Rightarrow$ $f(x)$ yakınsak

~~II. Tür Has olmayan İntegraller~~

~~$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sınırsız fakat $[a,b)$ de sürekli bir fonksiyon olsun.~~



~~Bu $f(x)$ fonksiyonunun has olmayan integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ veya $\int_a^b f(x)\,dx$ ile göst ve aş gibi tanımlar.~~

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

II. Tür Has olmayan İntegral

f fonksiyonu $[a,b)$ aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve $\lim_{x\to b^-} f(x) = \mp\infty$ olsun. Bu taktirde $\int_a^b f(x)dx$ integraline 2. tür has olmayan int. denir ve b noktasına da bu integralin singüler noktası denir. Bu integralin değeri

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$ ile tanımlıdır.

sağdaki limit varsa soldaki integral yakınsaktır. Aksi halde ıraksaktır.

Yine f fonk. $(a,b]$ aralığında int. bilir ve $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $\int_a^b f(x)dx$ integrali 2. tür has olmayan integraldir, a noktası singüler noktadır

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

ile hesaplanır. Limit varsa int. yakınsaktır.

İntegralin singüler noktası $[a,b]$ aralığının bir c iç noktası ise $[a,b]$ üzerindeki ikinci çeşit genelleştirilmiş integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ ile tanımlıdır.

Örnek! $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ int. yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = +\infty$ old.dan $x=1$ singüler nokta

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$1-x=u$
$-dx=du$
$-u^{-1/4}du$

$$= \lim_{t\to 1^-} -\frac{4}{3}(1-x)^{3/4} \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{4}{3}(1-t)^{3/4} + \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

verilen integral yakınsak olup değeri $\frac{4}{3}$ dür.

Örnek! $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ yakınsaklık durumu?

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 x^{-2} dx = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_t^2 = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2} + \frac{1}{t} = +\infty$$

verilen integral ıraksaktır.

Örnek! $\int_0^{\pi} \tan x \, dx$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ olup $x=\frac{\pi}{2}$ singüler nokta olup verilen int. 2. tür has olmayandır.

$$\int_0^{\pi} \tan x dx = \int_0^{\pi/2} \tan x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \tan x dx$$ olur.

$$\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\cos x = u \qquad -\sin x\,dx = du \qquad -\int \frac{du}{u} = -\ln u$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left(-\ln|\cos x|\right)\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left(-\underbrace{\ln|\cos t|}_{-\infty}\right) = +\infty$$

olup verilen int. ıraksaktır.

Karşılaştırma Testi!

Pozitif tanımlı f fonksiyonunun tek singüler noktası b ve her $x\in[a,b)$ için $f(x)\le g(x)$ olsun.

$\int_a^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ yakınsaktır.

$\int_a^b f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)dx$ ıraksaktır.

Örnek! $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\sin x}$ int. yak. durumu

$0 < x \le \frac{\pi}{2}$ için

$\sin x \le 1$

$x\sin x \le x$

$\frac{1}{x\sin x} \ge \frac{1}{x} > 0$

ve $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$ int. ıraksak old.dan verilen int. de ıraksaktır.

9

Örnek: Aşağıdaki has olmayan integrallerin yakınsak ve ıraksaklığını inceleyiniz. Yakınsaklık durumunda integrali bulunuz.

a) $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$ b) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Çözüm: a) $x=\frac{\pi}{2}$ den $\tan x$ sınırsız.

$$\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} -\ln\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\underbrace{-\ln \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{0}}_{-\infty} + \underbrace{\ln \underbrace{\cos 0}_{1}}_{=0}\Big) = +\infty$$

O halde $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$ ıraksaktır.

b) $x=1$ de fonks. sınırsızdır.

$$\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \qquad \ln x = u$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{\ln x}\,\Big|_{1+\varepsilon}^{e}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(2\sqrt{\underbrace{\ln e}_{1}} - 2\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\Big)$$

$$= 2 - 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}$$

$$= 2 - 2.0 = 2 \quad \text{int. yakınsaktır}$$

Not: $$\int_0^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{Yak}, & \alpha < 1 \\ \text{Irak} & \alpha \geq 1 \end{cases} \qquad (b>0)$$