3

Bazı Özel Fonksiyonlar

1) Gama fonksiyonu.

$\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz, gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$ genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır.

Gama fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyon da denir.

" Böylece $x=0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonun değeri

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \text{ dir}"$$

Not: $\forall x > 0$ için $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dir.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dir.

$x! = \Gamma(x+1)$ dir. $x \in \mathbb{Z}$

Örnek: $\Gamma(\frac{7}{2}) = ?$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olmasını kullanalım.

$$\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \Gamma(\tfrac{5}{2}+1) = \tfrac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}+1) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})$$

$$= \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

Beta Fonksiyonu

Genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyondur. B(x,y) ile gösterilir.

x, y nin sadece pozitif değerleri için tanımlayacağımız bu fonksiyon için aşağıdaki tanımlar kullanılır.

1) $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

2) $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta$

3) $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\cdot du$

4) $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, Γ gama fonks.

Bu 4 tanım eş anlamlıdır.

Örnek: $\int_0^\infty \frac{t^3}{(1+t)^5}\,dt = ?$

$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\cdot du$ $\quad x-1=3 \quad x=4$

$x+y=5 \quad y=1$

$B(x,y) = B(4,1) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(1)}{\Gamma(5)} = \frac{3!\,0!}{4!} = \frac{1}{4}$

$x! = \Gamma(x+1)$

Örnek: $\int_0^1 x^{-1/5}(1-x)^{-2/5}dx$

$x-1=-\frac{1}{5}$ $\quad x=\frac{4}{5}$

$y-1=-\frac{2}{5}$ $\quad \Rightarrow y=\frac{3}{5}$

$B(\frac{4}{5},\frac{3}{5}) = \frac{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{3}{5})}{\Gamma(\frac{7}{5})} \cong 1.85$

Ör: $\int_0^2 x^2(2-x)^9 dx = ?$

$x=2t \quad dx=2dt$

$I=\int_{t=0}^{1} 8t^2\, 2^9 (1-t)^9 dt$ $\qquad x-1=2 \quad x=3$

$\qquad y-1=9 \quad y=10$

$I=2^{12}\cdot B(3,10)$

$=2^{12}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(10)}{\Gamma(13)} = 2^{12}\cdot\frac{2!\,9!}{12!} = \frac{2^{10}}{165}$

Ör: a) $\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\, d\theta$ $\quad$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^5\theta\, d\theta$

$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$

$2m-1=6 \quad m=\frac{7}{2} \qquad 2n-1=0 \quad n=\frac{1}{2}$

$b(m,n)=B(\frac{7}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(7/2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\Gamma(\frac{1}{2})}_{\sqrt{\pi}}\underbrace{\Gamma(\frac{1}{2})}_{\sqrt{\pi}}}{2\cdot 3!}$

$=\frac{15}{8}\pi\cdot\frac{1}{12}=\frac{5\pi}{32}$