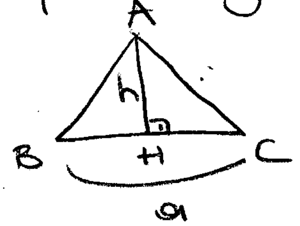
I. BÖLÜM: ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Tanım: D düzlemin bir bölgesi, f de D nin her bir (x,y) noktasına bir $f(x,y)$ reel sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir iki değişkenli fonksiyon adı verilir.

Buzayın bir bölgesi, f de B nin her bir (x,y,t) noktasına bir $f(x,y,z)$ sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna üç değişkenli fonksiyon denir. Daha çok değişkenli fonksiyonlar benzer şekilde tanımlanabilir.

Örnek: Üçgenin alanı taban uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir. İki değişkenli fonks.



$$S = \frac{1}{2} a.h$$

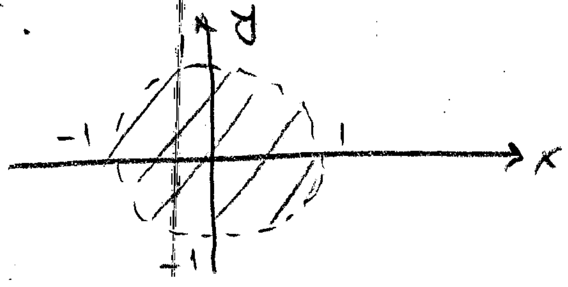
Faiz hesabında; A lira %t faiz oranı ile n yıl bankaya yatırıldığında getireceği faiz,

$$f = \frac{Ant}{100}$$ liradır. (Üç değişkenli fonks.)

Çok Değişkenli Fonksiyonların Tanım ve Görüntü Kümeleri

Ör: $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini bulup xy-düzleminde gösteriniz.

$1-x^2-y^2>0 \quad x^2+y^2<1$ O halde tanım kümesi merkezil çemberin içidir.



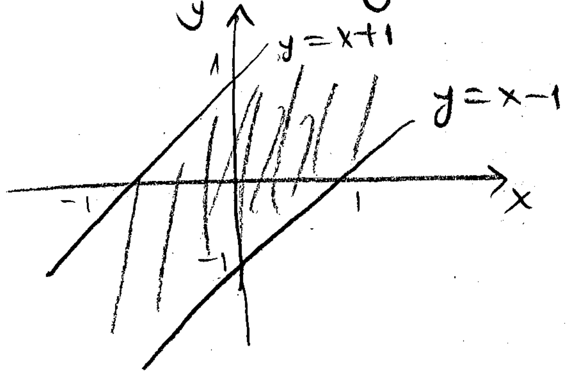
Örnek: $f(x,y) = \arcsin(y-x)$ fonks. tanım ve görüntü kümelerini bulunuz. Tanım kümesini xy-düzleminde gösteriniz.

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

olduğundan

$$-1 \le y-x \le 1$$

$y \le x+1$ ve $y \geq x-1$ dir.



Tanım kümesi taralı bölgedir.

Görüntü kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dir.

⇒ Örnek arkada;

Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Cebirsel İşlemler

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

$$(f-g)(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$$

$$(fg)(x,y) = f(x,y)\,g(x,y)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad , \; g(x,y) \neq 0$$

Bileşkesi

Çok değişkenli fonks. bileşkesi tek değişkenli fonksiyonlardaki olduğu gibidir.

Örneğin, g iki değişkenli, g nin görüntü kümesi tek değişkenli f fonks. tanım kümesi ise

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) \text{ dır.}$$

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x,y) \arrow[r, "f"] & f(g(x,y))
\end{tikzcd}$$

Örnek) $f(x)=x^2+3$, $g(x,y)=2x+5y$ ise $(f\circ g)(x,y)=?$

$$(f\circ g)(x,y)=f(g(x,y))=f(2x+5y)$$
$$=(2x+5y)^2+3$$

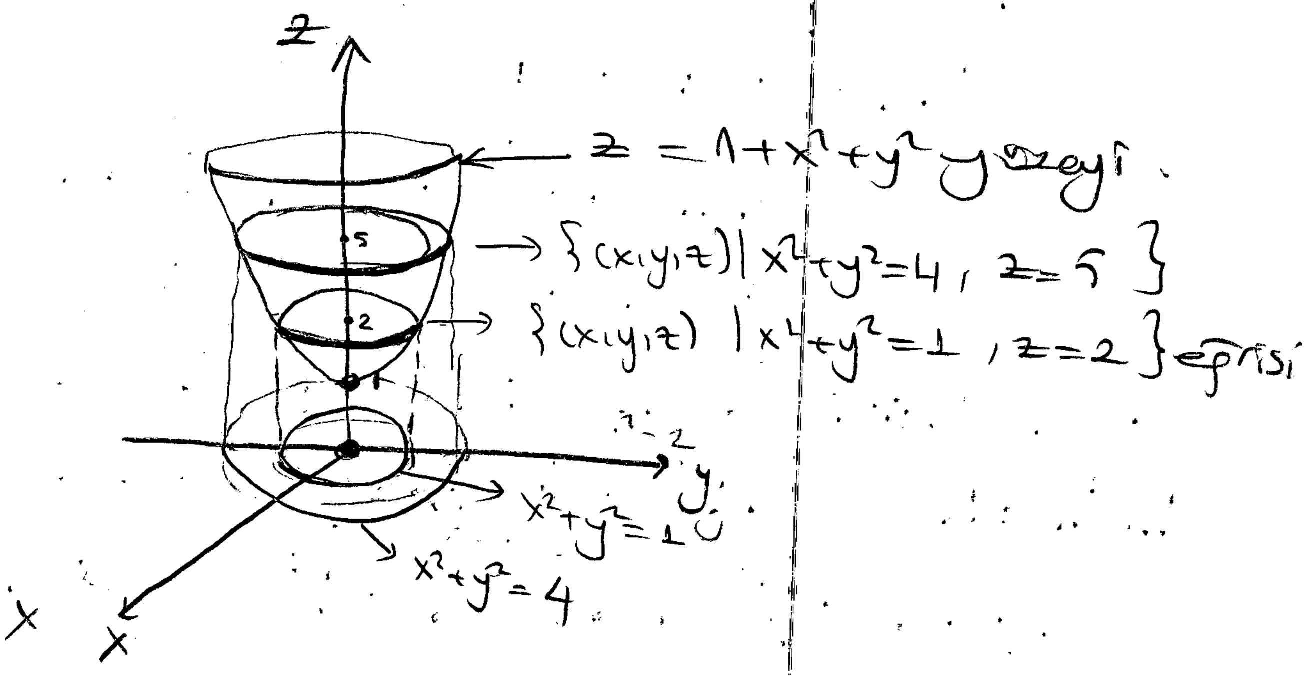
İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri

Tanım: f iki değişkenli bir fonksiyon ise f nin grafiği (x,y) tanım kümesinin elemanları olmak üzere $(x,y,f(x,y))$ noktalarının kümesidir.
İki değişkenli bir fonks. grafiğini çizmek için iki temel yol vardır. Bunlardan biri (x,y) noktalarını tanım kümesini tarayarak $(x,y,f(x,y))$ noktalarını uzayda işaretlemek, ikincisi ise seviye eğrilerini kullanmaktır.

Tanım: $z=f(x,y)$ fonks. verildiğinde xy düzleminde fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere f nin seviye eğrileri denir.

Örnek: $f(x,y)=1+x^2+y^2$ fonksiyonunun bazı seviye eğrilerini bulunuz. Bundan yararlanarak fonk. grafiğini çiziniz.

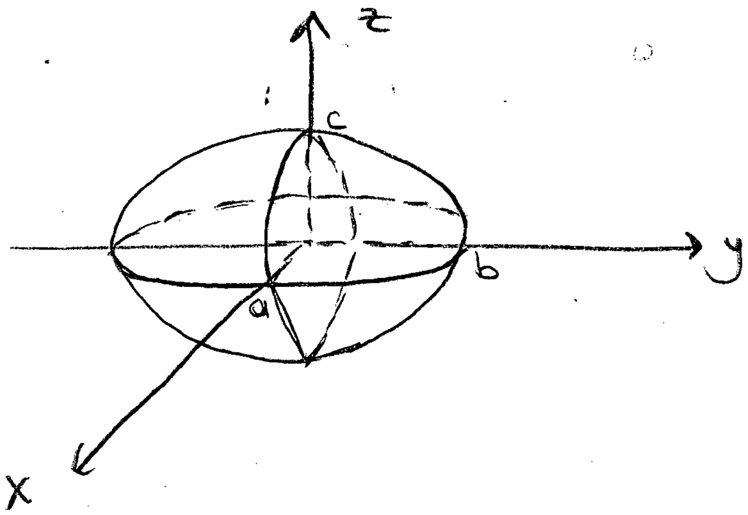
f fonksiyonu $x^2+y^2=1$ çemberi üzerinde $f(x,y)=2$ sabit değerini alır. O halde $x^2+y^2=1$ çemberi seviye eğrisidir. Benzer şekilde $x^2+y^2=4$ için $f(x,y)=5$ old. dan $x^2+y^2=4$ çemberi de seviye eğrisidir. $x^2+y^2=0$ yani $x=y=0$ için $f(x,y)=1$ olup $(0,0)$ noktasıda bir seviye eğrisidir.



Bazı Yüzey Denklemleri

* Koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle arakesitleri birer elips olan yüzeylere elipsoid denir.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$, Eksenleri kesim noktaları $(\mp a,0,0),(0,\mp b,0),(0,0,\mp c)$ dir.



Denklemden z çekilirse

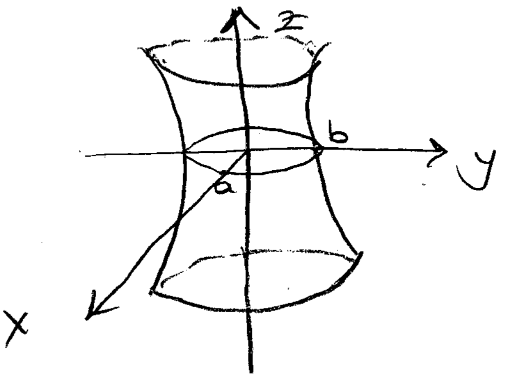
$$z=\mp c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$ denklemi üst yarı elipsoid.

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$ alt yarı elipsoid.

* Hiperboloid'ler genel olarak hiperbollerin asal eksen veya yedek eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilir. Tek kanatlı hiperboloidler,

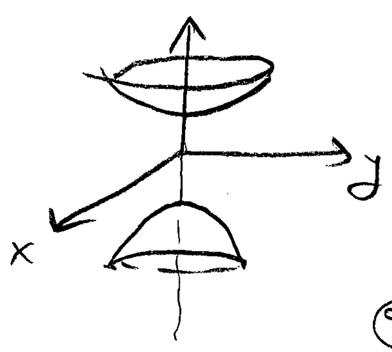
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad ✓ \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad ✓ \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



İki kanatlı hiperboloidler,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad ✓$$

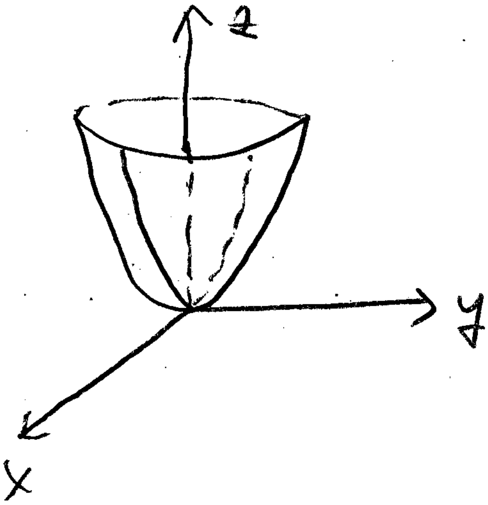
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



* Paraboloid; Genellikle parabolün simetri ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeylerdir, denklemi

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

olan yüzeye eliptik paraboloid denir. Bu yüzeyin xoy ekseniyle arakesiti bir nokta, xoy düzlemine paralel düzlemlerle arakesiti elipslerdir. xoz ve yoz düzlemleriyle arakesiti birer paraboldür.

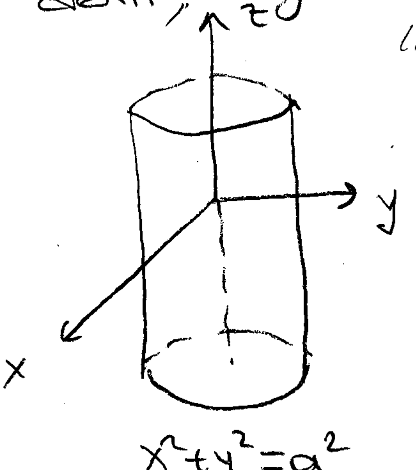


* Silindir: Uzayda herhangi bir doğru herhangi bir eğriye dayanarak kendisine paralel hareket ederse oluşan yüzeye silindir adı verilir. Silindir kapalı yüzey olmak zorunda değildir. Eğer dayanak eğrisi çember ise silindire dairesel silindir, dayanak eğrisi elips ise eliptik silindir denir, Dayanak eğrisi parabol ise parabolik silindir denir.

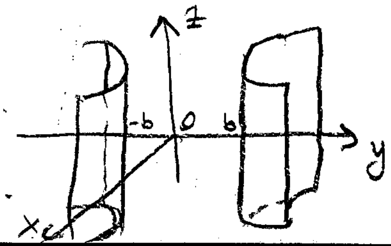
$$z = ax^2$$

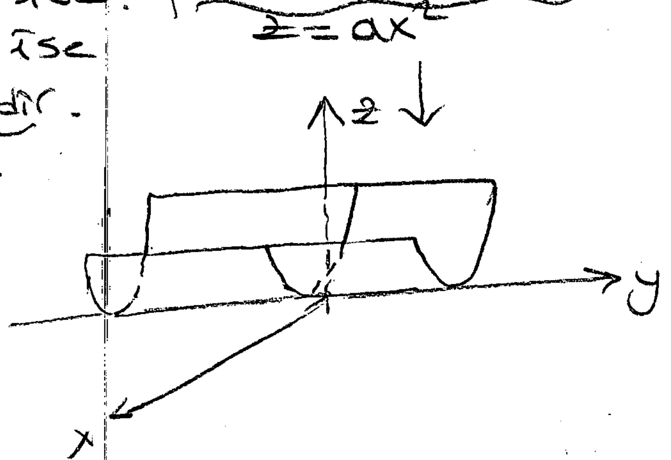
" hiperbol ise hiperbolik silindir.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



$x^2+y^2=a^2$
Dairesel silindir.



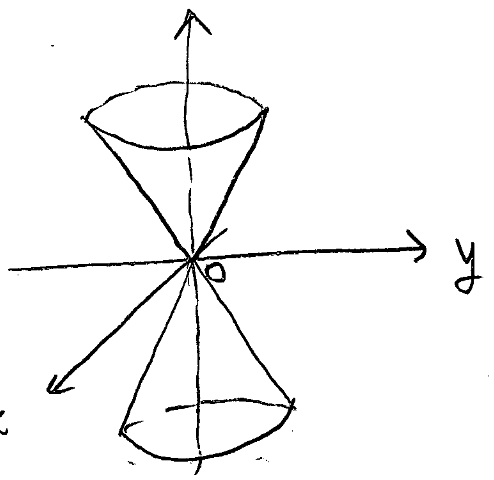


Koni; Sabit bir T noktasından geçen ve verilen bir, eğriyi kesen hareketli bir doğrunun oluşturduğu yüzeye koni denir. T noktasına tepe noktası, kestiği eğriye de koninin doğrultman eğrisi adı verilir. Yüzeyi oluşturan hareketli doğruya koninin ana doğrusu denir.

Doğrultman eğrisi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi olan koninin denklemi,

$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ dir. $\Rightarrow z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ üst yarı koni

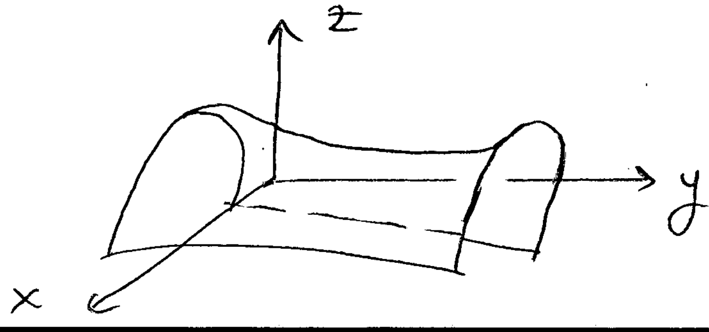
$z=-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ alt yarı koni



Hiperbolik Paraboloid; Birbirine dik iki düzlem içinde
(Semer yüzeyi)
bulunan iki parabolden birinin diğeri üzerinde hareket etmesiyle oluşan yüzeye denir.

$$\frac{z}{c}=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$$

xoy düzlemine paralel düzlemlerle arakesitleri birer hiperboldür. Hiperbolik adı burdan gelir.



$(c>0)$

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$, (a,b) ...

... f de A üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L dir

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

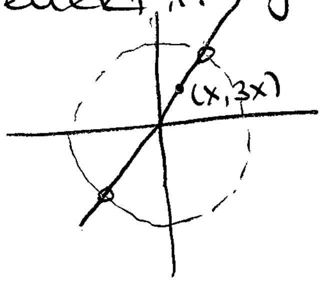
$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ki $0 < |x-a| < \delta$ ve $0 < |y-b| < \delta$ bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x,y) noktaları için

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ dır.}$$

"$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ ifadesi (x,y) noktaları (a,b) ye yaklaşırken f nin limiti L dir" şeklinde okunur.

Burada yaklaşma kavramı, (a,b) nin komşuluğunda bulunan ve gittikçe (a,b) ye daha yakın olarak seçilen (x,y) noktaları için f(x,y) değerlerinin l sayısına yaklaşmasıdır.

" (x,y) noktası $y=g(x)$ eğrisi boyunca (a,b) noktasına yaklaşıyor" cümlesinin anlamı da "(a,b) noktasından geçen $y=g(x)$ eğrisi üzerinde, gittikçe (a,b) ye yaklaşan (x,y) noktaları gözönüne alınıyor" demektir. Bu durum eğri üzerinde (a,b) noktasına doğru yön işaretlenerek gösterilir. Örneğin, "$(0,0)$ noktasına $y=3x$ doğrusu boyunca yaklaşılıyor" cümlesinin anlamı "$y=3x$ doğrusu üzerinde $(0,0)$ noktasına yakın olan $(x,y)=(x,3x)$ noktaları gözönüne alınıyor demektir.

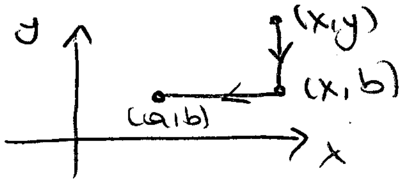


NOT: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ limiti varsa bu limit (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma şeklinden bağımsızdır. Yani (x,y) noktası (a,b) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşırsa yaklaşsın L sayısı değişmez. Eğer (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma yoluna göre limit değişiyorsa fonksiyonun (a,b) noktasında limiti yoktur.

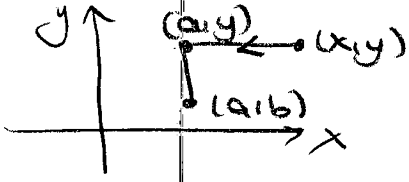
Şu halde f fonksiyonunun (a,b) noktasında limiti var ve L ise

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=L \quad \text{ve} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=L$$

olacaktır. Bunlara ardışık limitler denir. Birinci limit (x,y) noktasının önce y eksenine paralel sonra x eksenine paralel olarak (a,b) noktasına yaklaşması halinde limitin L olduğunu gösterir.



veya



$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \qquad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

NOT: Ardışık limit ifadesinde f, (x,y) nin bir fonksiyonu değil x in ya da y nin bir fonksiyonu olarak düşünülür. Bir fonksiyonun ardışık limitleri var olsa ve birbirine eşit olsa bile iki değişkenli fonksiyonun limiti olmayabilir. Ancak bunun tersi doğrudur. Yani

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L$$

$$\text{ve } \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L \text{ dır.}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = l$$

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = l$$

dır.

__Örnek:__ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ nin mevcut olmadığını gösteriniz.

x ekseni ile yaklaşırsak ($y=0$ doğrusu ile)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

y ekseni ile yaklaşırsak ($x=0$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

$\neq$

olduğundan limiti yoktur.

__Örnek:__

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonks. $(0,0)$ da limiti?

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

b) $y=2x$ doğrusu boyunca yaklaşdım.
$x\to 0$ için $y\to 0$ olur.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}$$

yaklaşma yönüne göre limit değişti
limit yoktur.

Örnek 1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ olduğunu göst..

Limit tanımından

$|x| < \delta$ ve $|y| < \delta$ iken

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{\cancel{|x|}y^2}{2\cancel{|x|}|y|}$$ dır. $x^2+y^2 \geq 2|x||y|$

$$= \frac{|y|}{2} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$, $\delta = 2\varepsilon$ alınırsa

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ olur.