ÇOK DEĞİŞKENLİ FONK. - II. BÖLÜM

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Teo: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l_1$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l_2$

limitleri mevcut olsun.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = l_1 + l_2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\, g(x,y) = l_1 . l_2$

c) $\forall c \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c . f(x,y) = c\, l_1$

d) $g(x,y) \neq 0$ ve $l_2 \neq 0$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Örnek: $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2$ $\quad g(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x+y+1}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \big(f(x,y) + g(x,y)\big) = 3$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \big(f(x,y)\, g(x,y)\big) = 2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y+1}{x+y+1} = 1$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ fonks[illegible] noktası . f, (a,b) de tanımlı $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise f fonksiyonu (a,b) de süreklidir, denir.

Eğer f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise A da süreklidir.

Sonuç, bir f fonks. (a,b) nokt. da sürekli

1) f, (a,b) de tanımlı
2) f, (a,b) de limiti var ve
3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ olmalıdır.

Örnek! $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir?

Önce $(0,0)$ noktasında limitine bakalım.

$y = mx^2$ parabolleri boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,mx^2)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2mx^2}{x^4+m^2x^4}$$

$$= \frac{2m}{1+m^2}$$

m değiştikçe limit değişeceğinden limiti yoktur dolayısıyla sürekli değildir.

Örnek! $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$

fonks. sürekli old. göst.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \lim \frac{\sin(x.y^2)}{xy^2} \cdot \lim \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 1.0 = 0$$

limitin gerçekten sıfır olduğunu görelim.

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{\cancel{|x|}\, y^2}{2\cancel{|x|}\,|y|} = \frac{|y|}{2} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

$$\boxed{x^2+y^2 \geq 2|x||y|}$$

$\delta = 2\varepsilon$ almak yeterlidir.

ve $f(0,0)=0$ old.dan fonks. $(0,0)$ da süreklidir.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$y = a\sqrt{x}$ eğrisi boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,a\sqrt{x})\to(0,0)} \frac{x.a^2.x}{x^2+a^4x^2} = \frac{a^2}{1+a^4}$$

limit yok.
Sürekli değil.

Not! Kutupsal koordinatlara geçiş yapılarak da limit hesaplanabilir.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti için kartezyen koordinatlarda hesaplamasında zorlanılırsa ya da bir sonuca ulaşılamazsa kutupsal koordinatlara geçilebilir.

Kutupsal koordinatlarda

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

olduğundan (x,y) noktasını $(0,0)$ noktasına yaklaştırmak için r yi sıfıra yaklaştırmak yeterlidir.

Herbir sabit θ için

$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = l$ olsun. Buna göre

~~$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$~~ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ verildiğinde $\exists \delta>0$ vardır ki

$|r|<\delta$ old. da $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| < \varepsilon$ dir. *

$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = l$ olması $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ olmasını gerektirmez. * şartı sağlanmalıdır.

Örnek! $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f fonks. $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli old. göst.

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0.$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ verilsin $|r| < \delta$ için

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos^2\theta\sin^2\theta| < r^2 < \delta^2 \leq \varepsilon$$

$\delta = \sqrt{\varepsilon}$ seçilirse $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ dr.

$f(0,0) = 0$ old. dan $(0,0)$ da süreklidir

Örnek: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \cos^2\theta$

θ değiştikçe değişir limit yok.

Örnek: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \cos 2\theta$

limit yok.

(449) Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x^2y^2 + 2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonks. orijinde sürekli olması için $a = ?$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos^2\theta - r^4\cos^2\theta\sin^2\theta + 2r^2\sin^2\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{2r^2 - r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}(2 - r^2\cos^2\theta\sin^2\theta) = 2$$

limit varsa 2 dir gösterelim. $(x^2+y^2 \geq 2|x||y|)$

$|x|<\delta$, $|y|<\delta$

$$\left|\frac{2x^2-x^2y^2+2y^2}{x^2+y^2}-2\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2y^2}{2|x||y|}$$

$$= \frac{|x||y|}{2} < \frac{\delta^2}{2} \leq \varepsilon$$

$\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ seçilir.

$f(0,0)=a=2$ olmalıdır.