ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR III. BÖLÜM

KISMİ TÜREVLER

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ bir fonksiyon ve $(a,b) \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}$$

limiti varsa bu limite f nin x değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi denir. ve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \quad , \quad f_x(a,b)$$

Sembollerinden biri ile gösterilir.

Benzer şekilde,

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}$$

limiti varsa bu limite f nin y değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi denir,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \quad , \quad f_y(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Örnek: $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ için $f_x(1,2)$ ve $f_y(1,2)$ türevlerini hesaplayınız.

1. yol: y - sabit tutulur x değişkenine göre türev alınır.

$$f_x(x,y) = 2x - 3y \qquad f_x(1,2) = -4$$

x-sabit, y ye göre türev

$$f_y(x,y) = -3x + 2y \qquad f_y(1,2) = 1$$

2. yol: Tanım kullanılır.

$$f_x(1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 6(1+h) + 4 - (-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 6 - 6h + 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h - 4) = -4$$

$$f_y(1,2) = \lim_{k \to 0} \frac{f(1,2+k) - f(1,2)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1 - 3(k+2) + (k+2)^2 - (-1)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} (k+1) = 1$$

Örnek: Eğer varsa

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ türevlerini hesaplayınız.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

Örnek: $f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ fonks. $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)=?$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonların kısmi türevleri de benzer şekilde hesaplanır.

Örnek: $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{xy}{z}\right)$ $\qquad f_x, f_y, f_z=?$

$$f_x(x,y,z)=\frac{\left(\frac{xy}{z}\right)_x}{\frac{xy}{z}}=\frac{\frac{y}{z}}{\frac{xy}{z}}=\frac{1}{x}$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{\frac{x}{z}}{\frac{xy}{z}}=\frac{1}{y}\qquad f_z(x,y,z)=\frac{-\frac{xy}{z^2}}{\frac{xy}{z}}=-\frac{1}{z}$$

f fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevlerinin de x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri var ise bu türevlere f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri denir. Buna göre f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

<u>Not</u>: ~~Eğer~~ Eğer f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} türevleri (a,b) de tanımlı ve (a,b) de sürekli ise

$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ dir.

<u>Örnek</u>! $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$ $\quad f_{xx}$, f_{xy}, f_{yx}, $f_{yy} = ?$

$f_x(x,y) = e^x + \ln y + \frac{y}{x}$ $\qquad f_y(x,y) = x\cdot\frac{1}{y} + \ln x$

$f_{xx}(x,y) = e^x - \frac{y}{x^2}$ $\qquad f_{yy} = -\frac{x}{y^2}$

$f_{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = f_{yx} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$

8

Zincir Kuralı

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ olsun. f, f_x, f_y fonksiyonları A üzerinde sürekli ve $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri varsa

$z = f(g(u,v), h(u,v))$ fonksiyonunun da u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{olur.}$$

Örnek: $z = \ln(x^2+y^2)$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$

olduğuna göre $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot e^u\cos v + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot e^u \sin v$$

$$= \frac{2\cancel{e^u}\cos v}{e^{\cancel{2u}}}\cdot \cancel{e^u}\cos v + \frac{2\cancel{e^u}\sin v}{e^{\cancel{2u}}}\cdot e^u \sin v$$

$$= 2\cos^2 v + 2\sin^2 v = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot(-e^u \sin v) + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot e^u \cos v$$

$$= \frac{-2\cdot e^{2u}\cos v \sin v}{e^{2u}} + \frac{2e^{2u}\sin v \cos v}{e^{2u}} = 0$$

Tüm fonksiyonların kısmi türevleri var ise;

① $z = f(x,y)$ $x = g(t)$, $y = h(t)$ ise

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

② $u = f(x,y,z)$ $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$ ise

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

③. $y = f(x)$, $x = g(u,v)$ ise

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$ olur.

Örnek: $u = f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ ise $\frac{du}{dt} = ?$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \cdot (-\sin t) + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos t + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \cdot 1$$

$$= \frac{-2\cos t \sin t + 2 \cdot \sin t \cos t + 2t}{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Örnek: $z_{xx} - m^2 z_{yy} = 0$ denklemini

için $u = mx + y$, $v = -mx + y$

eşitlikleriyle verilen u ve v değişkenlerine

göre yazınız. Burada $z = z(x,y)$ dir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot m + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-m)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = m \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(m\frac{\partial z}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial v} \right) . m$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(m\frac{\partial z}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial v} \right) . (-m)$$

$$= m^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) + m^2 \left(-\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$$

$$= m^2 (z_{uu} - 2 z_{uv} + z_{vv})$$

ve $z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$= z_{uu} + 2 z_{uv} + z_{vv}$$

denklemde yazılırsa

$$m^2(z_{uu} - 2 z_{uv} + z_{vv}) - m^2 (z_{uu} + 2 z_{uv} + z_{vv}) = 0$$

$$-4 z_{uv} = 0$$

$z_{uv} = 0$ elde edilir.