ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR IV

Tam Diferansiyel

$u=f(x_1,x_2,--,x_n)$ n-değişkenli türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun tam diferansiyeli

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Diferansiyel yaklaşık değer hesabı yapmanızı sağlar.

Örnek! $z=xe^y$ fonksiyonunun dz tam diferansiyelini hesaplayın

$z_x=e^y$, $z_y=xe^y$ $\quad dz=z_x dx+z_y dy$

$\quad = e^y.dx+xe^y dy$

Örnek! $f(x,y)=xe^{xy}$ tam dif. bul.

$df=f_x dx+f_y dy$

~~Örnek!~~ Bir dikdörtgenin bir kenarı $a=10$ cm ve diğeri $b=24$ cm dir. a kenarı 4 mm arttırılır, b kenarı 1 mm kısaltılırsa köşegeni ne kadar değişir. Gerçek ve yaklaşık değişimini bulup karşılaştırınız.

Köşegen uzunluğu $l=\sqrt{a^2+b^2}$ dir.

$$dl=l_a\,da+l_b.db$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.da+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}db$$

$a=10$ $\quad b=24$ $\quad da=0,4$ $\quad db=-0,1$ alınırsa

$$dl=\frac{10}{\sqrt{100+576}}.0,4+\frac{24}{\sqrt{100+576}}.(-0,1)\cong 0,062$$

Gerçek değişimi bulalım. İlk durumda $l=\sqrt{100+576}=26$ cm

$a_1=10+0,4=10,4$ $\quad b_1=24-0,1=23,9$

$l=\sqrt{(10,4)^2+(23,9)^2}\cong 26,065$ $\quad \Delta l=0,065$ cm

$0,065-0,062=0,003$ cm gibi küçük bir fark.

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyelinden bahsedebilmek için bu fonksiyonun türevli olması gerekir. Eğer $z=f(x,y)$ yüksek mertebeden sürekli kısmi türevleri varsa $df(x,y)$ fonksiyonunun da tam diferansiyeli bulunabilir.

$dz = z_x dx + z_y dy$ nın bir kez daha diferansiyeli alınırsa

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}(z_x dx + z_y dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(z_x dx + z_y dy)\,dy$$

$$=(z_{xx} dx + z_{yx} dy)\,dx + (z_{xy} dx + z_{yy} dy)\,dy$$

$$d^2z = z_{xx}(dx)^2 + 2z_{xy}\,dx\,dy + z_{yy}(dy)^2$$

~~Örnek! $f(x,y) = xe^{xy}$ fonk. tam diferansiyelini bulunuz.~~

~~$df = f_x dx + f_y dy$~~

~~$df = (e^{xy} + xye^{xy})dx + x^2e^{xy}dy$~~

Örnek!: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonu için $df(x,y,z)$ fonksiyonunun tam diferansiyelini bulunuz.

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

$$d^2f = \frac{\partial}{\partial x}(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)\,dy$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)\,dz$$

$$d^2f = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2$$

Örnek: $(1,02)^{3,01}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm $f(x,y) = x^y$, $x=1$ $dx = 0,02$

$y=3$ $dy = 0,01$

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy$$
$$= y\,x^{y-1}\,dx + x^y . \ln x\, dy$$
$$= 3 . 1^2 . 0,02 + 1 . \ln 1 . (0,01) = 0,06$$

$$f(1,02 \,;\, 3,01) \cong f(1,3) + df = 1 + 0,06 = 1,06$$

Kapalı Fonksiyonların Türevi

$y=f(x)$ şeklindeki bir f fonksiyonuna açık olarak verilmiş fonksiyon veya kısaca açık fonksiyon, $F(x,y)=0$ şeklindeki bir fonksiyona da kapalı olarak verilmiş veya kapalı bir fonksiyon denir.

İki değişkenli bir fonksiyon da da $F(x,y,z)=0$ biçiminde kapalı olarak tanımlanabilir.

$F(x,y,z)=0$ denklemi ile verilmiş olan $z=f(x,y)$ fonksiyonunun türevini zincir kuralı ile alalım.

F_x ve F_y türevleri sürekli ve $F_z(a,b) \neq 0$ olsun.

$$\frac{\partial F}{\partial x} . \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial F}{\partial z} . \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dy}}_{=1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$ yazılabilir.

Örnek! $z^3+xyz+xy^2-1=0$ ile verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $z_x(1,1)$ ve $z_y(1,1)$ türevlerini bulunuz.

$x=1,\ y=1\quad z^3+z=0\quad z=0$

$$z_x(1,1)=\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-\frac{F_x(1,1,0)}{F_z(1,1,0)}=-\left.\frac{yz+y^2}{3z^2+xy}\right|_{(1,1,0)}=-1$$

$$z_y(1,1)=\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\frac{F_y(1,1,0)}{F_z(1,1,0)}=-\left.\frac{xz+2xy}{3z^2+xy}\right|_{(1,1,0)}=-2$$

Örnek! $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$, (π,π,π) noktasındaki kısmi türevini hesaplayınız.

$$F(x,y,z)=\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)$$

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\left.\frac{\cos(x+y)+\cos(x+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\right|_{(\pi,\pi,\pi)}=-1$$

$$z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\left.\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\right|_{(\pi,\pi,\pi)}=-1$$

Örnek:

$F(x,y,z) = xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8$ fonks. $(1, \ln 2, \ln 3)$ noktasındaki kısmi türevi

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{e^y + \frac{2}{x}}{ye^z}\bigg|_{(1,\ln 2,\ln 3)} = -\frac{4}{3\ln 2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xe^y + e^z}{ye^z}\bigg|_{(1,\ln 2,\ln 3)} = -\frac{5}{3\ln 2}$$

Herhangi Bir yönde Türev Almak

Tanım: $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P(a,b,c)$ noktasındaki kısmi türevleri var olsun. u bir birim vektör olmak üzere.

$$(D_u f)_P = (\nabla f)_P \cdot u$$

Sayısına f nin u yönündeki türevinin P noktasındaki değeri denir. Burada

$$(\nabla f)_P = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)j + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)k\right)\bigg|_P$$

olup $\vec{\nabla} f$ vektörüne f nin gradiyenti denir.

Örnek: $f(x,y,z) = xy^2 + yz$ fonksiyonunun $u = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j - \frac{6}{7}k$ yönündeki türevinin $P(1,7,7)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$$f_x = y^2 \quad f_y = 2xy + z, \quad f_z = y$$

$$(\nabla f)_P = (\nabla f)_{(1,7,7)} = 49i + 21j + 7k$$

$$(D_u f)_{(1,7,7)} = (\nabla f)_P \cdot u = 49 \cdot \frac{2}{7} + 21 \cdot \frac{3}{7} + 7 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = 17$$

Örnek: $f(x,y,z) = x e^{\frac{y}{z}}$ fonksiyonunun $\bar{\imath} = (1,0,0)$ yönündeki türevini hesaplayınız. (6)

$$D_{\bar{\imath}} f = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 + f_z \cdot 0$$

$$D_{\bar{\imath}} f = f_x = e^{y/z}$$

Örnek! $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z$ fonksiyonunun $P(5,1,0)$ noktasını $Q(2,-3,12)$ noktasına birleştiren doğru yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin P noktasındaki değerini hesaplayınız.

$\vec{PQ} = (-3,-4,12)$ old. dan PQ vektörüne paralel birim vektör

$$u = \frac{1}{\|PQ\|} PQ = \frac{1}{\sqrt{9+16+144}} (-3,-4,12) = \left(\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

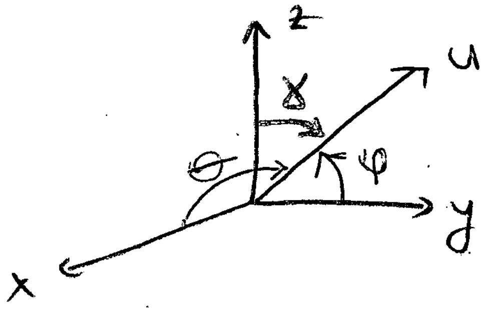
$f_x(x,y,z) = 2xy$, $f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz$ $f_z(x,y,z) = y^2$

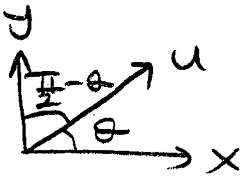
$$D_u f = 2xy\left(\frac{-3}{13}\right) + (x^2 + 2yz)\left(\frac{-4}{13}\right) + y^2 \cdot \frac{12}{13}$$

$$(D_u f)_{(5,1,0)} = -\frac{30}{13} - \frac{100}{13} + \frac{12}{13} = -\frac{118}{13} \text{ olur.}$$

NOT! Bir u birim vektörünün koordinat eksenleri ile yaptığı açıların ölçüleri sırası ile θ, φ, γ ise u nun bileşenleri $\cos\theta, \cos\varphi, \cos\gamma$ olur. Bunlara u vektörünün doğrultman kosinüsleri adı verilir. Bu durumda f nin u yönündeki türevi

$$D_u f = f_x \cos\theta + f_y \cos\varphi + f_z \cos\gamma \text{ olur.}$$





f iki değişkenli ise

u nun x-ekseni ile yaptığı açı θ ise, y ekseni ile yaptığı açı $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ olacağından

$$D_u f = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta \text{ olur.}$$

Örnek: $f(x,y) = 2xy + 3x^3y$ fonksiyonu için $\left(D_{\frac{\pi}{4}} f\right)(1,2)$ türevini hesaplayınız.

$$f_x(x,y) = 2y + 9x^2y \qquad f_y(x,y) = 2x + 3x^3$$

$$D_{\frac{\pi}{4}} f = (2y + 9x^2y)\cos\frac{\pi}{4} + (2x + 3x^3)\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2y + 9x^2y + 2x + 3x^3\right)$$

$$\left(D_{\frac{\pi}{4}} f\right)(1,2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 27$$