İki Değişkenli Fonksiyonların Taylor Açılımları

Tanım:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]^k$$

$$= f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+\cdots$$

serisine f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki Taylor serisi denir.

Örnek: $f(x,y)=x^3+2x^2+3xy+y^2-x+y-1$ ifadesini $(x-1)$ ve $(y+1)$ in kuvvetlerine göre 3. mertebeden terimlere kadar yazınız.

$(1,-1)$ noktası komşuluğunda seriye açınız.

$f(1,-1)=-2$

$f_x(x,y)=3x^2+4x+3y-1$ $\qquad f_x(1,-1)=3$

$f_y(x,y)=3x+2y+1$ $\qquad f_y(1,-1)=2$

$f_{xx}(x,y)=6x+4$ $\qquad f_{xx}(1,-1)=10$

$f_{xy}(x,y)=3$ $\qquad f_{xy}(1,-1)=3$

$f_{yy}(x,y)=2$ $\qquad f_{yy}(1,-1)=2$

$f_{xxx}(x,y)=6$ $\qquad f_{xxy}=f_{xyy}=f_{yyy}=0$

$$f(x,y)=-2+\frac{1}{1!}\left(3(x-1)+2(y+1)\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[10.(x-1)^2+6(x-1)(y+1)+2(y+1)^2\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[6.(x-1)^3\right]$$

Örnek: $f(x,y)=e^x \sin y$ fonksiyonunu $(0,0)$ noktası komşuluğunda Taylor serisine açınız.

$f(0,0)=0$

$f_x(x,y)=e^x \sin y \qquad f_x(0,0)=0$

$f_{xx}(x,y)=e^x \sin y \qquad f_{xx}(0,0)=0$

$f_{xxx}(x,y)=e^x \sin y \qquad f_{xxx}(0,0)=0$

$f_y(x,y)=e^x \cos y \qquad f_y(0,0)=1$

$f_{yy}(x,y)=-e^x \sin y \qquad f_{yy}(0,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=e^x \cos y \qquad f_{xy}(0,0)=1$

$f_{xxy}(x,y)=e^x \cos y \qquad f_{xxy}(0,0)=1$

$f_{xyy}(x,y)=-e^x \sin y \qquad f_{xyy}(0,0)=0$

$f_{yyy}(x,y)=-e^x \cos y \qquad f_{yyy}(0,0)=-1$

$$e^x \sin y = \frac{1}{1!}y + \frac{1}{2!}(2xy) + \frac{1}{3!}\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{(x^3 f_{xxx} + 3x^2y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})}$$

$$= y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3!}y^3 + \cdots$$

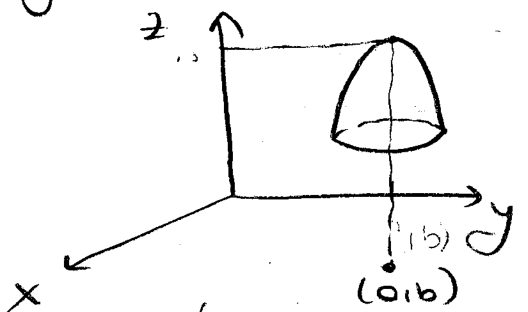
MAKSİMUM VE MİNİMUMLAR

Teo: $z=f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ olsun.

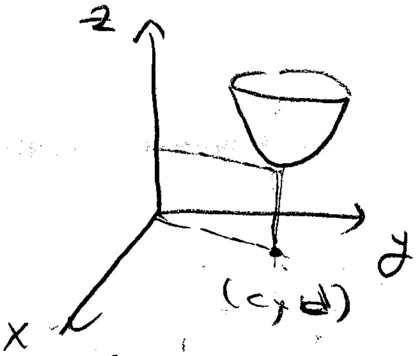
1) $f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)>0$ ve $f_{xx}(a,b)>0$ ise (a,b) noktası bir yerel minimum noktasıdır.

2) $f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)>0$ ve $f_{xx}(a,b)<0$ ise (a,b) noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

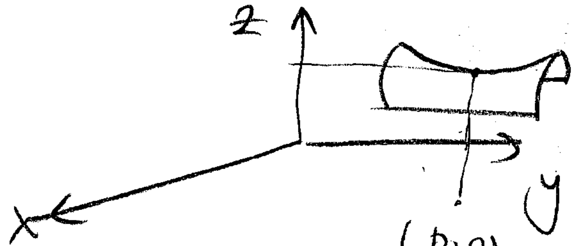
3) $f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)<0$ ise (a,b) eyer noktasıdır.



(a,b) yerel maksimum.



(c,d) yerel minimum.



eyer noktası

Örnek: Eğer varsa $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

$f_x(x,y)=3y-3x^2=0 \qquad y=x^2$

$f_y(x,y)=3x-3y^2=0 \qquad x=y^2$

$y=(y^2)^2 \qquad y(1-y^3)=0$

$y_1=0 \quad y_2=1 \qquad x_1=0 \quad x_2=1$

olup kritik noktalar $A(0,0)$, $B(1,1)$ noktalarıdır.

$f_{xx}(x,y)=-6x \quad f_{yy}(x,y)=-6y \quad f_{xy}(x,y)=3$

olup $A(0,0)$ noktasında $f_{xx}=0 \quad f_{yy}=0 \quad f_{xy}=3$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-9<0$

olup $A(0,0)$ bir eyer noktasıdır.

$B(1,1)$ noktasında $f_{xx}=-6 \quad f_{yy}=-6 \quad f_{xy}=3$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=36-9=27>0$

olur. $f_{xx}=-9<0$ olduğundan $B(1,1)$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

Örnek! $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$

fonks. yerel ekstremum nokt. bulunuz

$f_x(x,y)=3x^2+6x=0$ $\quad 3x(x+2)=0$ $\quad x=0$ veya $x=-2$

$f_y(x,y)=3y^2-6y=0$ $\quad 3y(y-2)=0$ $\quad y=0$ veya $y=2$

Kritik noktalar $A(0,0)$ $B(0,2)$

$C(-2,0)$ $D(-2,2)$

$f_{xx}=6x+6$ $\quad f_{xy}=0$ $\quad f_{yy}=6y-6$

$A(0,0)$ noktasında

$f_{xx}(0,0)=6$ $\quad f_{xy}(0,0)=0$ $\quad f_{yy}(0,0)=-6$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6(-6)-0=-36<0$

$A(0,0)$ eyer noktasıdır.

$B(0,2)$ $\quad f_{xx}(0,2)=6$ $\quad f_{xy}=0$ $\quad f_{yy}=6$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6.6-0=36>0$ ve $f_{xx}=6>0$

$B(0,2)$ yerel min. noktası.

Yerel min değeri ise

$f_{min}=f(0,2)=8-12-8=-12$

$C(-2,0)$ nokt. $\quad f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-6)(-6)-0=36>0$

ve $f_{xx}=-6<0$ yerel max nokt.

Yerel max. değeri $f_{max}=f(-2,0)=-4$

$D(-2,2)$ eyer noktası.

Bir fonksiyonun yerel maksimum veya yerel minimum değerleri ile fonksiyonun en büyük (mutlak maksimum) ve en küçük (mutlak minimum) değerlerini karıştırmamak gerekir. Fonksiyonun birden fazla yerel ekstremum değerleri olabilir. Fakat mutlak maksimumu veya mutlak minimumumu varsa tektir.

Bir B bölgesinde sürekli türevlere sahip bir fonksiyon mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini ya B bölgesinin içindeki bir yerel ekstremum noktasında ya da B nin sınırı üzerinde alır. Kapalı bir bölge üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini araştırırken şu yolu izlemekte yarar vardır.

1) Bölgenin içindeki kritik noktalar bulunur. Bu noktalardaki fonksiyon değerleri hesaplanır.

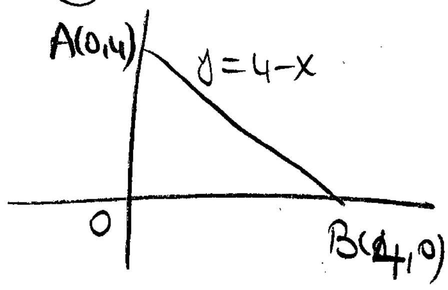
2) B bölgesinin C sınır eğrisi üzerindeki kritik noktalar bulunur. Bu noktalardaki fonksiyon değerleri hesaplanır.

3) 1. ve 2. adımda bulunan fonks. değerleri karşılaştırılır. Bulunan değerlerin en büyüğü fonks. aldığı en büyük değer (mutlak maksimum) en küçüğü de fonks. aldığı en küçük değer (mutlak minimum) olur.

B

NOT: Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimumları ile fonksiyonun eğer varsa en büyük (mutlak maksimum) ve en küçük (mutlak minimum) değerleri farklıdır. Bir fonksiyonun yerel ekstremumları mutlak ekstremumları olmayabilir. Bir fonksiyonun birden fazla yerel maksimum ve yerel minimum değerleri olabilir. Fakat mutlak max ve/ya min varsa tektir.

Örnek: $B=\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 4-x\}$ bölgesi üzerinde tanımlı $f(x,y)=xy(3-x-y)$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını bulunuz.



Bölgenin kritik noktaları

$f_x(x,y)=y(3-2x-y)=0$

$f_y(x,y)=x(3-x-2y)=0$

Sist. sağlayan (x,y) ikilileri

$(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,1)$ olup kritik noktalardır. Fonks. bu noktalarda aldığı değerler

$f(0,0)=0 \quad f(0,3)=0, \quad f(3,0)=0 \quad f(1,1)=1$

12

$f(x,y)=f(x,x-2)=x^2+(x-2)^2-2x=2x^2-6x+4$

$f'(x,x-2)=4x-6=0 \quad x=\frac{3}{2} \quad y=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ kritik nokta

$x=0$ doğrusu üzerinde $f(0,y)=y^2$

$f'(0,y)=2y=0 \quad y=0 \quad (0,0)$ kritik nokta.

Şimdi sınır üzerinde aldığı ekstremum değerleri bulalım.

[OA] üzerinde $x=0$ old. dan $f(x,y)=0$

sınır [OB] 〃 $y=0$ old. dan $f(x,y)=0$

[AB] 〃 $y=4-x$ $f(x,4-x)=x^2-4x$

fonks. [0,4] üzerindeki ekstremum değerlerini bulmalıyız.

$f'(x,4-x)=2x-4=0$ $x=2$ $y=2$

(2,2) de kritik noktadır.

$f(2,2)=-4$.

(x,y)	(0,0)	(0,3)	~~(0,4)~~	(1,1)	(2,2)	(3,0)	~~(4,0)~~
	0	0	0	1	-4	0	0
				EB.	EK.		

Mutlak minimum (en küçük değer) $=-4$

bu değeri aldığı nokta (2,2)

Mutlak maks. (en büyük değer) $=1$

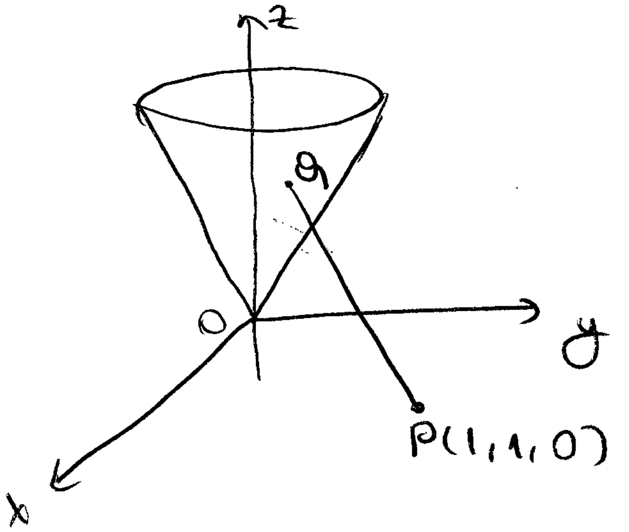
aldığı ~~değer~~ nokta (1,1)

16

16

Örnek ! $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi üzerinde $P(1,1,0)$ noktasına en yakın olan Q noktasının koordinatlarını bulunuz. P noktasının koniye olan uzaklığını hesaplayınız.

$Q=(x,y,z)$ olsun.



Q koni üzerinde old. dan

$Q=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$

yazılabilir.

Q ile P arasındaki uzaklık minimum olması gerekir.

Bu uzaklık

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+x^2+y^2}$$

olup bunu min. yapan x, y değerleri

$f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2+x^2+y^2$ fonks. min. yapan x, y değerleridir.

$$f_x=2(x-1)+2x=0 \qquad 4x-2=0 \quad x=\frac{1}{2}$$

$$f_y=2(y-1)+2y=0 \qquad 4y-2=0 \quad y=\frac{1}{2}$$

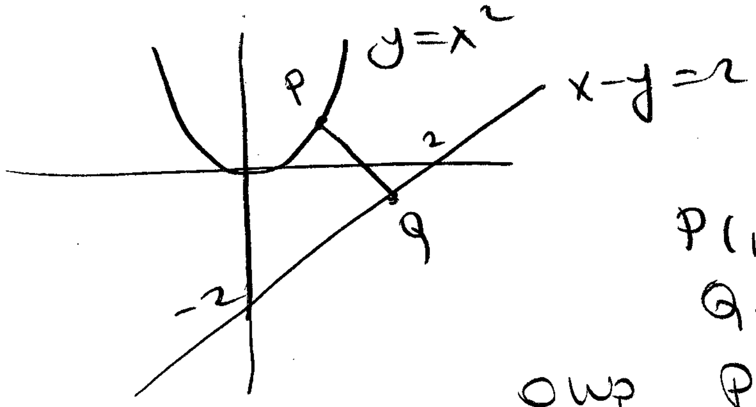
$Q=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olur. Böylece $P(1,1,0)$ noktasının koniye olan uzaklığı

$$d=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$\cancel{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$

A

Örnek! İki nehirden birinin yatağı $y=x^2$ parabolü diğerininki $x-y=2$ doğrusu üzerindedir. Bu iki nehir arasında açılacak doğrusal bir kanalın uzunluğu en az kaç birim olur.



$P(m, m^2)$

$Q=(n, n-2)$

olup P ile Q ar. uzaklık min.

$$d=\|PQ\|=\sqrt{(n-m)^2+(n-2-m^2)^2}$$

$$f(m,n)=(n-m)^2+(n-2-m^2)^2$$

$$f_m=-2\cancel{(n-m)}+2(n-2-m^2)\cdot(-2m)=0$$

$$f_n=2\cancel{(n-m)}+2(n-2-m^2)=0$$

$$(n-2-m^2)(-4m+2)=0$$

$$\boxed{m=\frac{1}{2}}$$

$$n-2-m^2=0$$

$$n=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$$d=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{4}-2-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$d=\sqrt{\frac{49}{16}+0}=\frac{7}{4}$$ ✓