Lagrange Çarpanları Yöntemi

Şimdiye kadar gördüğümüz max ve min. problemlerinde değişkenler sadece tanım bölgesinde kalmak üzere, serbest olarak değişebiliyordu.

Ekstremum değerleri aranan fonksiyon üç değişkenli $f(x,y,z)$ fonks. olsun. x,y,z değişkenleri $g(x,y,z)=0$ denklemi ile bağlı olsunlar. f ve g fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerinin varolduklarını kabul edelim. λ bulunması gereken bir sabit olmak üz.

$$h(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

fonksiyonu teşkil edilir. Bundan sonra x,y,z,λ değişkenlerine göre kısmi türevler alınarak

$$h_x=f_x+\lambda g_x=0$$
$$h_y=f_y+\lambda g_y=0$$
$$h_z=f_z+\lambda g_z=0$$
$$h_\lambda=g=0$$ sistemi bulunur.

Bu sistemin çözümü olan (x,y,z) noktası bir ekstremum noktadır.

Eğer f ve g iki değişkenli fonkslar ise yukarıdaki denklemler

$$f_x+\lambda g_x=0$$
$$f_y+\lambda g_y=0$$
$$g(x,y)=0$$ olur.

Örnek: $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ fonksiyonu $x^2+y^2+z^2=30$ küresi üzerinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun en küçük ve en büyük değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ fonksiyonunun $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-30=0$ yan şartı altındaki mutlak max ve min. bulunacaktır.

$$h(x,y,z;\lambda) = x - 2y + 5z + \lambda(x^2+y^2+z^2-30)$$

$h_x = 1 + 2\lambda x = 0 \qquad x = -\frac{1}{2\lambda}$

$h_y = -2 + 2\lambda y = 0 \qquad y = \frac{1}{\lambda}$

$h_z = 5 + 2z\lambda = 0 \qquad z = -\frac{5}{2\lambda}$

$h_\lambda = x^2+y^2+z^2-30=0$

olur. İlk üç denklemden bulunan x, y, z değerleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2\lambda}\right)^2 - 30 = 0$$

$$4\lambda^2 = 1 \qquad \lambda = \mp\frac{1}{2}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ için $x=-1,\ y=2,\ z=-5$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ için $x=1,\ y=-2,\ z=5$

$f(-1,2,-5) = -30 \qquad f(1,-2,5) = 30$

fonks. alacağı en küçük değer -30

" en büyük " 30 dur.

Örnek: $(y-1)^2=4x$ parabolünün $P(2,0)$ noktasına en yakın noktasının koord. Lagrange çarp. ayırma met. ile bulunuz.

$d=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$f(x,y)=(x-2)^2+y^2$ uzaklık fonks.

$g(x,y)=(y-1)^2-4x=0$

$h(x,y;\lambda)=(x-2)^2+y^2+\lambda((y-1)^2-4x)$

$h_x=2(x-2)-4\lambda=0 \quad x=2\lambda+2$

$h_y=2y+2\lambda(y-1)=0 \quad y=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

$h_\lambda=(y-1)^2-4x=0$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}-1\right)^2=4(2\lambda+2)$$

$$\frac{1}{(\lambda+1)^2}=8(\lambda+1) \Rightarrow (\lambda+1)^3=\frac{1}{8}$$

$$\lambda+1=\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=1$

$y=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}=-1$ olur.

P noktasına en yakın nokta $A(1,-1)$ noktasıdır.

Örnek: $z^2=4x^2+4y^2$ konisi ile $2y+4z=5$ düzleminin arakesit eğrisi üzerinde $O(0,0,0)$ orijin noktasına en yakın olan noktayı bulunuz.

$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ifadesini min yapan (x,y,z) noktaları $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunu min yapan nokta aynı olacağından

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunun $z^2=4x^2+4y^2$ ve $2y+4z=5$ yan şartları altındaki min değerleri bulunacaktır.

$h(x,y,z;\lambda,\gamma)=x^2+y^2+z^2+\lambda(4x^2+4y^2-z^2)$
$+\gamma(2y+4z-5)$ fonks. için

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2x+8x\lambda=0 \\ h_y &= 2y+8y\lambda+2\gamma=0 \\ h_z &= 2z-2z\lambda+4\gamma=0 \\ h_\lambda &= 4x^2+4y^2-z^2=0 \\ h_\gamma &= 2y+4z-5=0 \end{aligned}\right\}$$

sist. e. e.
1. denk.
$2x(1+4\lambda)=0$
$x=0 \vee \lambda=-\frac{1}{4}$

Son iki denkde $x=0$ yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} 4y^2-z^2=0 \\ 2y+4z=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y=5-4z$$

$\Rightarrow (5-4z)^2-z^2=0 \Rightarrow$

$(5-4z-z)(5-4z+z)=0$

$z=1 \vee \quad z=5/3$