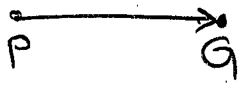
VEKTÖR CEBİRİ (1)

Tanım: Vektör, iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır.



$\vec{PQ}$ nun büyüklüğü $\|\vec{PQ}\|$ ile gösterilir.

Bir $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$$ dir.

Tanım: $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ vektörleri
$\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$
için $\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

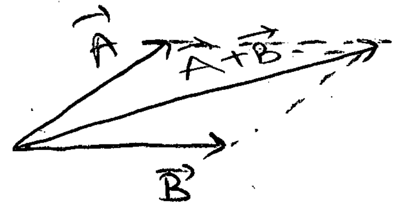
1) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ dır.

2) $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ birleşme

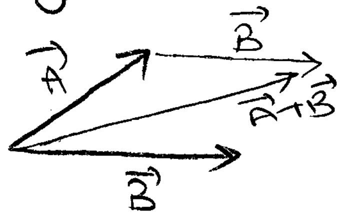
3) $-\vec{A}$ vektörü A ile aynı büyüklükte ve doğrultuda fakat ters yönde olan vektördür.

$$-\vec{A}=(-a_1,-a_2,-a_3)$$

4) İki vektörün toplamı paralel kenar kuralı ile bulunur.



veya uç uca eklenir.



5) $m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+m\vec{B}$, $m\in\mathbb{R}$

Tanım: Skaler çarpım, Nokta çarpım ya da İç çarpım;

$$\vec{A}=(a_1,a_2,a_3) \quad , \quad \vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

şeklinde tanımlanır.

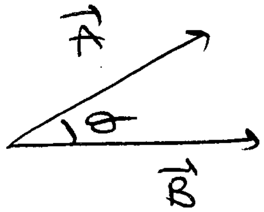
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \quad \text{değişme öz.}$$

$$A\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$m(\vec{A}\cdot\vec{B})=(m\vec{A})\cdot B=\vec{A}\cdot(m\vec{B}), \quad m\in\mathbb{R}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\|A\|^2$$

Tanım; İki vektör arasındaki açı



$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|} \quad \text{dir.}$$

$\|\vec{B}\|$ nun $\vec{A}$ vekt. üzerine dik izdüşümü $\|\vec{B}\|\cos\theta$, ($\|\vec{A}\|$ nun $\vec{B}$ vekt. " " $\|A\|\cos\theta$ dir.) Yani;

$$\|B\|\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|} \quad \text{ile bulunur.}$$

Örnek: $\vec{A}=(2,-1,1)$ $\quad \vec{B}=(1,2,-2)$

$\|A\|$ nın $\vec{B}$ üzerine dik izdüşümü

$$\|A\|=(A\cdot A)^{1/2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$$\|B\|=(B\cdot B)^{1/2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=2-2-2=-2$$

$$\|A\|\cos\theta=\frac{A\cdot B}{\|B\|}=-\frac{2}{3}$$

Tanım (Vektörel Çarpım):

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \quad , \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3 \, , a_3b_1 - a_1b_3 \, , a_1b_2 - a_2b_1)$$

<u>Örnek</u>: $\vec{A} = (2,1,3) \quad \vec{B} = (1,-2,1)$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i(1.1 - (-2).3) - j(2.1 - 3.1) + k(2(-2) - 1)$$

$$= 7\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

<u>Özellikleri</u>

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vektörleri için

$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$ Ters değişme öz.

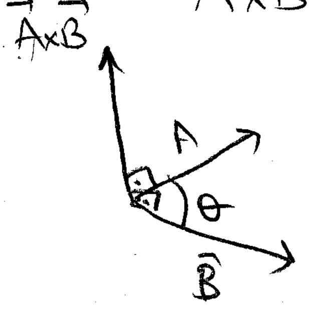
$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ dağılma

$m(A \times B) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) \; , m \in \mathbb{R}$

$\vec{A} \times \vec{A} = 0$

$A \cdot (A \times B) = 0$ ve $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

$\vec{A} \times \vec{B} \perp A$ ve $\vec{A} \times \vec{B} \perp B$ dir.



$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin\theta$$

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

Örnek: $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ve $\vec{B} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

vektörlerine dik olan birim vektör bulunuz.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2k$$

$$= (2, -2, -2)$$

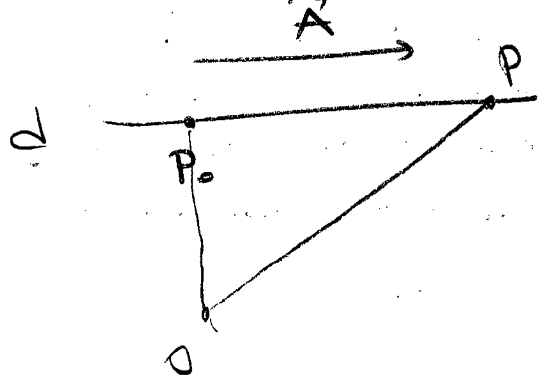
$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\|A \times B\|} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{4+4+4}}_{2\sqrt{3}}} (2, -2, -2)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, -1) \quad \text{veya} \quad -\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1)$$

Tanım (Uzayda Doğru denklemi):

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$

vektörüne paralel olan doğru denk. bulalım.



Doğru üzerinde herhangi bir $P(x, y, z)$ nokt. alalım.

$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P}$ yazılır.

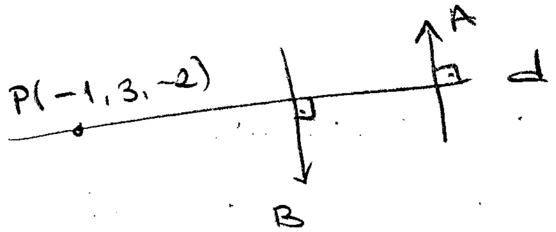
$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{A}$, $t \in \mathbb{R}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \end{array} \right. \quad \text{parametrik denk.}$$

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} = t \rightarrow \text{kartezyen denk.}$$

Örnek: $P(-1,3,-2)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$ vektörüne dik olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.



$\vec{A} \perp d$. $\vec{B} \perp d$

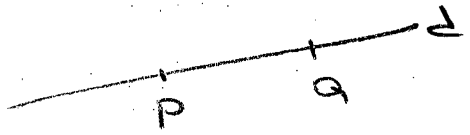
$\Rightarrow$ $\vec{A} \times \vec{B} \parallel d$ dir.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

d doğrusunun doğrultmanıdır. Doğru üz. herhangi bir nokta $P(x,y,z)$ olmak üz.

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{2} = t \quad \text{yazılır.}$$

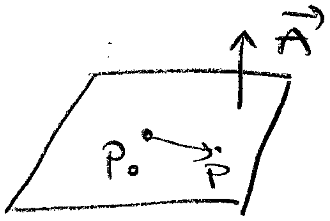
Örnek: $P(1,-2,1)$ ve $Q=(3,1,1)$ nokt. geçen doğrunun denk.



$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,3,0)$ doğrunun doğrultmanı olarak alınabilir.

Tanım (Düzlem Denklemi):

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ nokt. geçen $\vec{A} = (a_1,a_2,a_3)$ vekt. dik olan düzlem



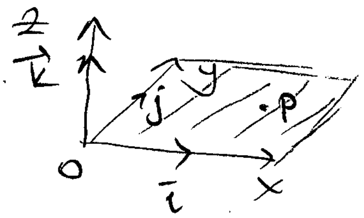
$\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{A} = 0$ ile bulunur.

(P düzlem üz. herhangi bir nokta)

$P(x,y,z)$ $\quad P_0(x_0,y_0,z_0)$ $\quad \overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

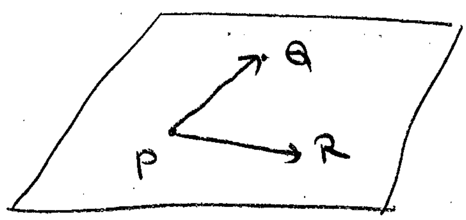
$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{A}=0 \iff (x-x_0)a_1+(y-y_0)a_2+(z-z_0)a_3=0$$

__Örnek:__ xoy düzleminin denk.



Bu düzlem $O(0,0,0)$ dan geçen $\vec{k}(0,0,1)$ vekt. dik olan düzlem.
$P(x,y,z)$ için
$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{k}=0 \iff z=0$ dır.

__Örnek:__ $P=(-2,1,3)$ $\quad Q=(1,2,-1)$ ve $R=(-3,-2,1)$ nokt. geçen düzlemin denk.

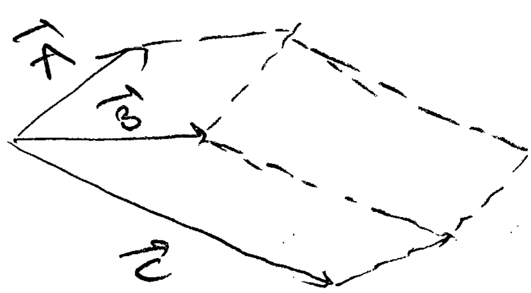


$\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PR}$ düzlemi içinde vektörler ve $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ hem $\overrightarrow{PQ}$ hem de $\overrightarrow{PR}$ ye dik. düzlemin normalidir.

__Tanım__ (Karma Çarpım): $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ üç vektör
$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ çarpımına bu üç vektörün karma çarpımı denir. Ayrıca

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) \text{ ile tanımlıdır.}$$

__NOT:__ Karma çarpım bu üç vektör üzerine kurulan paralel yüzün hacmini verir.



$$V=\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$$

ör $\xrightarrow{\text{arkada}}$