II. Vektör Değerli Fonksiyonlar (2)

<u>Tanım:</u> $I \subset \mathbb{R}$, V bir vektör kümesi olsun. Tanım kümesi I, değer kümesi V olan fonksiyonlara vektör değerli fonksiyonlar denir.

$$F : I \longrightarrow E^3$$
$$t \longrightarrow F(t) = (f(t), g(t), h(t))$$
$$= f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

buradaki reel değerli f, g, h fonksiyonlarına vektör değerli F fonksiyonunun bileşenleri denir.

<u>Tanım:</u> F ile G vektör değerli, f ile g reel değerli fonksiyonlar olsunlar.

$(F \mp G)(t) = F(t) \mp G(t)$

$(F.G)(t) = F(t).G(t)$ → sadece bu reel değerli

$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$

$(f.F)(t) = f(t).F(t)$

$(F \circ g)(t) = F(g(t))$

diğerleri vektör değerli.

<u>Örnek:</u> $F(t) = t.\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3 k$

$G(t) = (1-t)\hat{i} + (1+t^2)\hat{j} + tk$

$(F+G)(t) = F(t) + G(t) = \hat{i} + (1+2t^2)\hat{j} + (t+t^3)k$

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ t & t^2 & t^3 \\ 1-t & 1+t^2 & t \end{vmatrix} = -t^5\hat{i} + (-t^4 + t^3 - t^2)\hat{j} + (2t^3 - t^2 + t)k$$

Örnek: $F(t) = \sin t \cdot \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + (1+t)\vec{k}$ ve

$G(t) = \cos 2t\, \vec{i} - \sin 3t\, \vec{j} + (e^t + 1)\vec{k}$

$\lim_{t\to 0} F(t)G(t)$ ve $\lim_{t\to 0} F(t)\times G(t) = ?$

$$\lim_{t\to 0} F(t) = 0\cdot \vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k} = \vec{j} + \vec{k}$$

$$\lim_{t\to 0} G(t) = 1\cdot \vec{i} - 0\cdot \vec{j} + (2)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\lim_{t\to 0} (F(t)G(t)) = (\vec{j}+\vec{k})\cdot(\vec{i}+2\vec{k}) = 2$$

$$\lim_{t\to 0} (F(t)\times G(t)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Tanım: F, I aralığında tanımlı vektör değerli fonks. $t_0 \in I$ için

F, t_0 da süreklidir $\Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$.

F, I üzerinde süreklidir $\Leftrightarrow$ F, I nın her nokt. da süreklidir.

Teorem: 1) Vektör değerli F fonksiyonunun t_0 da sürekli olması için g.v.y.k onun bileşen fonksiyonlarının da t_0 da sürekli olmasıdır.

2) F, G ve s fonks. t_0 da sürekli ise $F \mp G$, $F\cdot G$, $F\times G$ ve sF de t_0 da süreklidir.

Özellikler: F ve G vektör değerli, s reel değerli fonk. t_0 nokt. komş. da tanımlı olsunlar.

$\lim_{t\to t_0} F(t) = A$, $\lim_{t\to t_0} G(t) = B$ ve $\lim_{t\to t_0} s(t) = m$ ise

$\lim_{t\to t_0} (F(t)+G(t)) = A+B$, $\lim_{t\to t_0} (F(t)G(t)) = AB$

$\lim_{t\to t_0} (F(t)\times G(t)) = A\times B$, $\lim_{t\to t_0} (s(t)F(t)) = mA$

Örnek: $F(t) = (|t|+1)i + t|t-1|j + (2+t^2)k$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonunun $t_1=0$ ve $t_2=1$ noktalarında sürekli olup olmadığını araşt.

$$F(0) = i + 2k$$

$$\lim_{t\to 0} F(t) = i + 2k = F(0)$$ olup $t=0$ da süreklidir.

$$F(1) = 2i + 3k \qquad \lim_{t\to 1} t|t-1|$$

$$\left(\lim_{t\to 1^+} t^2 - t = \lim_{t\to 1^-} -t^2+t = 0\right)$$

$$\lim_{x\to 1} F(t) = 2i + 3k$$

$t_2=1$ noktasında süreklidir.

Örnek:

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3t}{t} i + \dfrac{1-\cos^2 t}{t^2} j + \sqrt{1+t}\, k, & t \neq 0 \\ 3i + j + k, & t = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $t=0$ noktasında sürekli midir?

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t}{t}\right) i + \left(\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\right) j + \left(\lim_{t\to 0} \sqrt{1+t}\right) k$$

$$\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

$$= 3i + j + k = F(0)$$

F, $t=0$ da süreklidir.

Vektör Değerli Fonksiyonların Türevi

Tanım: F vektör değerli fonksiyon ve t_0 da tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}$$

limiti varsa, bu limite F nin t_0 daki türevi denir ve $F'(t_0)$ veya $\frac{dF}{dt}(t_0)$ sembollerinden biriyle gösterilir.

Teorem: $F(t) = f(t)\bar{i} + g(t)\bar{j} + h(t)k$

fonksiyonunun t_0 da türevli olması için $\Leftrightarrow$ f, g, h fonks. t_0 da türevli olmasıdır.

$$F'(t_0) = f'(t_0)\bar{i} + g'(t_0)\bar{j} + h'(t_0)k$$

Örnek: $F(t) = (t+t^2)\bar{i} + e^{2t}\bar{j} + \sin t\, k$

fonksiyonunun $t_0 = 0$ noktasındaki türevini hesap.

$$f(t) = t+t^2 \qquad f'(t) = 1+2t \qquad f'(0) = 1$$
$$g(t) = e^{2t} \qquad g'(t) = 2e^{2t} \qquad g'(0) = 2$$
$$h(t) = \sin t \qquad h'(t) = \cos t \qquad h'(0) = 1$$

olacağından $F'(0) = \bar{i} + 2\bar{j} + k$.

Örnek: $F(t) = t\bar{i} + |t|\bar{j} + e^t k$ fonks. $t=0$ daki türevi,

$|t|$ nin $t=0$ da türevi yok.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t-0}{t-0} = 1 \neq \lim_{t\to 0^-} \frac{-t-0}{t-0} = -1$$

Teorem: F, G ve h fonks. t noktasında, u da $u(s)=t$ eşitliğini sağlayan s noktasında türevli ise,

$$[F(t)+G(t)]' = F'(t)+G'(t)$$

$$[h(t)F(t)]' = h'(t)F(t) + h(t)F'(t)$$

$$[F(t)\cdot G(t)]' = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)$$

$$[F(t)\times G(t)]' = F'(t)\times G(t) + F(t)\times G'(t)$$

$$[(F\circ u)(s)]' = F'(u(s))\,u'(s)$$

Örnek: $F(t) = t\,i + (1+t)\,j + t^2 k$

$$G(t) = i + t^2 j + (1-t)k$$

$[F(t)\cdot G(t)]'$ ve $[F(t)\times G(t)]'$

$$[F(t)\cdot G(t)]' = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)$$

$$= (i + j + 2t\,k)(i + t^2 j + (1-t)k)$$

$$+ (t\,i + (1+t)j + t^2 k)(2t\,j - k)$$

$$= 1 + \cancel{t^2} + 2t - \cancel{2t^2} + 2t + \cancel{2t^2} - \cancel{t^2}$$

$$[F(t)\cdot G(t)]' = 4t + 1$$

$$F(t)\times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t & 1+t & t^2 \\ 1 & t^2 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t^2-t^4)\,i + (2t^2-t)\,j + (t^3-t-1)\,k$$

$$[F(t)\times G(t)]' = (-2t-4t^3)\,i + (4t-1)\,j + (3t^2-1)\,k$$

Örnek! 449| $u(t) = t\hat{i} + (t+1)k$, $v(t) = t^2\hat{j}$,

$w(t) = \frac{1}{t^2}k \Rightarrow F(t) = u(t) \cdot [v(t) \times w(t)]$

Çözüm!

$$F(t) = u(t) \cdot [v(t) \times w(t)] = \det(u(t), v(t), w(t))$$

$$u(t) = (t, 0, t+1)$$

$$v(t) = (0, t^2, 0)$$

$$w(t) = (0, 0, \frac{1}{t^2})$$

$$F(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & t+1 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{t^2}(t \cdot t^2) = t$$

$(+)$

veya

$$v(t) \times w(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = \hat{i}$$

$$u(t) \cdot [v(t) \times w(t)] = (t, 0, t+1) \cdot (1, 0, 0)$$

$$= t$$

Vektör Değerli Fonks. İntegralleri

Tanım: $F(t)$ vektör değerli fonks.

$$\int F(t)\,dt = G(t)+C \qquad C = \text{sbt}.$$

Eğer $F(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,k$ ise

$$\int F(t)\,dt = \left(\int f(t)\,dt\right) i + \left(\int g(t)\,dt\right) j + \left(\int h(t)\,dt\right) k$$

Örnek: $F(t) = 2t\,i + e^t\,j + 4\sin 2t\,k$ belirsiz int.

$$\int F(t)\,dt = \left(\int 2t\,dt\right) i + \left(\int e^t\,dt\right) j + \left(\int 4\sin 2t\,dt\right) k$$

$$= (t^2 + c_1)\,i + (e^t + c_2)\,j + (-2\cos 2t + c_3)\,k$$

$$= t^2 i + e^t j - 2\cos 2t\,k + C$$

$C = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ sabit vektördür.

Örnek: $F'(t) = 2t\,i + \sin t\,j + e^t k$ ve

$F(0) = 2i + 2j$

bağıntılarını sağlayan $F(t)$ fonks. bulunuz.

$$F(t) = \int F'(t)\,dt = t^2 i + \cos t\,j + e^t k + C$$

$$F(0) = -j + k + C = 2i + 2j \qquad C = 2i + 3j - k$$

$$F(t) = t^2 i - \cos t\,j + e^t k + 2i + 3j - k$$

$$= (t^2+2)\,i + (3 - \cos t)\,j + (e^t - 1)\,k$$

Tanım: $F(t) = f(t)\,\bar{i} + g(t)\,\bar{j} + h(t)\,k$

fonksiyonunun $[a,b]$ de deki integrali

$$\int_a^b F(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\bar{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\bar{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]k$$

Örnek: $F(t) = 2t\,\bar{i} + (1+t^2)\,\bar{j} + \sin \pi t\, k$. $\int_0^1 F(t)\,dt = ?$

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \left(\int_0^1 2t\,dt\right)\bar{i} + \left(\int_0^1 (1+t^2)\,dt\right)\bar{j} + \left(\int_0^1 \sin \pi t\,dt\right)k$$

$$= t^2\Big|_0^1\,\bar{i} + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1\,\bar{j} - \frac{1}{\pi}\cos \pi t\Big|_0^1\,k$$

$$= \bar{i} + \frac{4}{3}\bar{j} + \frac{2}{\pi}k$$

$\underline{\text{Dr}}$ $I = \int_1^2 \left[(6-6t)i + 3\sqrt{t}\,j + \left(\frac{4}{t^2}\right)k \right] dt = ?$ $\quad \frac{t^{-2+1}}{-1}$

$$I = \left(\int_1^2 (6-6t)\,dt\right)\bar{i} + \left(\int_1^2 3\sqrt{t}^{1/2}\,dt\right)\bar{j} + \left(\int_1^2 \frac{4}{t^2}\,dt\right)k$$

$$= \left(6t - 6\frac{t^2}{2}\Big|_1^2\right)\bar{i} + \left(\cancel{3}\frac{2}{\cancel{3}}t^{3/2}\Big|_1^2\right)\bar{j} + 4\left(-\frac{1}{t}\Big|_1^2\right)k$$

$$= \left(12 - 12 - (6-3)\right)\bar{i} + \left(2 \cdot 2\sqrt{2} - 2\right)\bar{j} - 4\left(\frac{1}{2} - 1\right)k$$

$$= -3\bar{i} + (4\sqrt{2} - 2)\bar{j} + 2k$$

$\underline{\text{Dr}}$ $I = \int_1^4 \left[\frac{1}{t} i + \frac{1}{5-t} j + \frac{1}{2t} k \right] dt$

$$I = \left(\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt\right)\bar{i} + \left(\int_1^4 \frac{1}{5-t}\,dt\right)\bar{j} + \left(\int_1^4 \frac{1}{2t}\,dt\right)k \quad \underset{u}{} \; \frac{-du}{u}$$

$$= \left(\ln t\Big|_1^4\right)\bar{i} + \left(-\ln|5-t|\Big|_1^4\right)\bar{j} + \left(\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^4\right)k$$

$$= \ln 4\,\bar{i} + (-\ln 1 + \ln 4)\bar{j} + \frac{1}{2}(\ln 4 - \cancel{\ln 1})k$$

$$= \ln 4\,\bar{i} + \ln 4\,\bar{j} + \frac{1}{2}\ln 4\,k$$

Ör: $\frac{dr}{dt} = -t\,i - t\,j - t\,k \;,\; r(0) = i + 2j + 3k$

koşullarını gerçekleyen $r(t)$ fonksiyonu bulunuz

$$r(t) = \int \frac{dr}{dt}\,dt = \int -t\,dt\;\bar{i} - \int t\,dt\;\bar{j} - \int t\,dt\;k$$

$$= -\frac{t^2}{2}\,\bar{i} - \frac{t^2}{2}\,\bar{j} - \frac{t^2}{2}\,k + c$$

$$r(0) = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0k + c = \bar{i} + 2\bar{j} + 3k$$

$$c = \bar{i} + 2\bar{j} + 3k$$

$$r(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\bar{i} + \left(2 - \frac{t^2}{2}\right)\bar{j} + \left(3 - \frac{t^2}{2}\right)k$$

Ör: $\frac{dr}{dt} = \frac{3}{2}(t+1)^{3/2}\,i + e^{-t}\,j + \frac{1}{1+t}\,k \;,\; r(0) = k$

$$r(t) = \int \frac{dr}{dt}\,dt = \left(\frac{3}{2}\int (t+1)^{3/2}\,dt\right)\bar{i} + \left(\int e^{-t}\,dt\right)\bar{j}$$

$$+ \left(\int \frac{1}{1+t}\,dt\right)k$$

$$r(t) = \left(\frac{3}{2}\,\frac{2}{5}(t+1)^{5/2}\right)\bar{i} + \left(-e^{-t}\right)j + \left(\ln|1+t|\;k\right) + c(t)$$

$$r(0) = \frac{3}{5}\,\bar{i} - j + c(t) = k$$

$$c(t) = -\frac{3}{5}\,\bar{i} + j + k$$

$$r(t) = \frac{3}{5}(t+1)^{5/2}\,\bar{i} - e^{-t}\,j + \ln|1+t|\,k + \left(-\frac{3}{5}\,\bar{i} + j + k\right)$$

$$= \frac{3}{5}\left(-1 + (t+1)^{5/2}\right)i + \left(1 - e^{-t}\right)j + \left(1 + \ln(1+t)\right)k$$