$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{-3/4}{5/4} = -\frac{3}{5}$, $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = -\frac{5}{3}$

$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{4}{5}$, $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = -\frac{4}{3}$

Örnek: $2\cosh(\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$2\cosh(\ln x) = \cancel{2}\,\frac{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}{\cancel{2}} = x + e^{\ln\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x}$$

Örnek: $\sinh(2\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$\sinh(2\ln x) = \frac{e^{2\ln x}-e^{-2\ln x}}{2} = \frac{e^{\ln x^2}-e^{\ln x^{-2}}}{2} = \frac{x^2-x^{-2}}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

Örnek: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$ ifadesinin eşitini bulalım

$\cosh x + \sinh x = e^x$, $\cosh x - \sinh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2} = e^{-x}$

$\Rightarrow \ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x) = \ln e^x + \ln e^{-x} = x - x = 0$

Limit ve Süreklilik

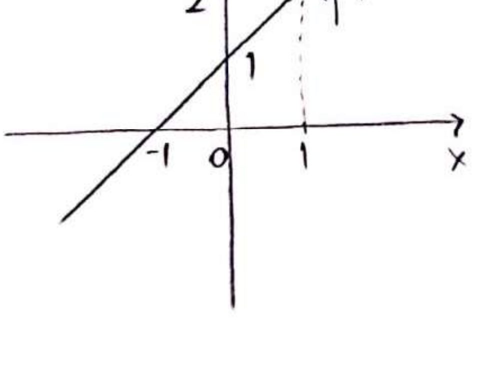
Limit kavramını vermeden önce şu örneği inceleyelim:

Örnek: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ dir.

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

$\Rightarrow f$ in grafiği $y = x+1$ doğrusundan $(1,2)$ noktasının çıkarılması ile elde edilir. Acaba fonksiyon $x=1$ de tanımlı olsaydı $f(1)$ değeri ne olurdu?



Bu soruya cevap verebilmek için 1 e çok yakın noktalarda f in değerine bakmalıyız.

Bir tablo oluşturarak f değerlerini gözlemleyelim:

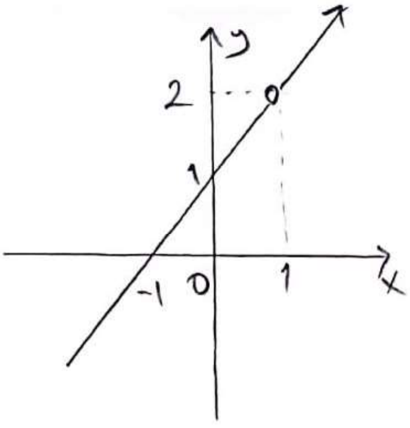
x	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,99	1,999	1,9999 $\longrightarrow$		$\longleftarrow$ 2,0001	2,001	2,01

Tabloda görüldüğü gibi x 1e yaklaştıkça $f(x)$ değerleri de 2 ye yaklaşmaktadır. Bu durumu

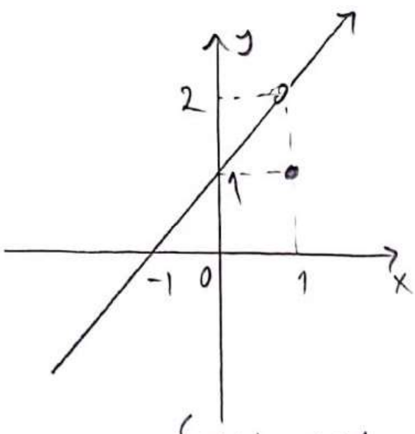
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

ile gösteririz.

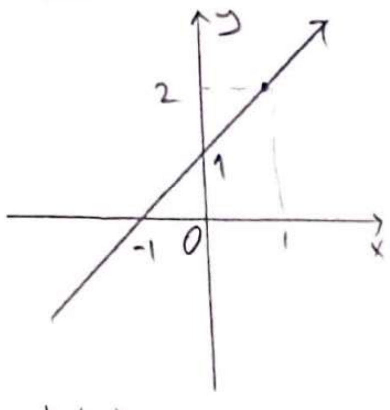
Uyarı: Fonksiyonun bir noktadaki limiti o nokta fonksiyonun tanımlı olup olmamasına bağlı değildir.



$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$



$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



$h(x) = x+1$

Yukarıda verilen f, g ve h fonksiyonlarının x 1e yaklaşırken limitleri 2 dir. Halbuki, $x=1$ de sadece $h(x)$ in değeri limiti ile aynıdır.

Şimdi limit tanımını verelim:

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti L dir denir ve $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ yazılır.

Uyarı: $0<|x-x_0|<\delta$ ifadesinden anlaşılacağı üzere x hiçbir zaman x_0 a eşit olmaz. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun x_0 daki değeri ile ilgilenmiyoruz.

Örnek: $\lim_{x\to 3} 2x-5=1$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon>0$ verilsin. $0<|x-3|<\delta$ olduğunda $|f(x)-1|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ bulmalıyız.

$$|f(x)-1|=|2x-5-1|=|2x-6|=2\underbrace{|x-3|}_{<\delta}<2\delta$$

$\Rightarrow$ $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ olarak seçilirse $|f(x)-1|<2\delta=2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

Teorem: $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2$ olmak üzere

1) $\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda L_1$

2) $\lim_{x\to x_0}(f\mp g)(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x)\mp g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\mp\lim_{x\to x_0} g(x)=L_1\mp L_2$

3) $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)=L_1 L_2$

4) $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$, $(L_2\neq 0)$

5) $f(x)$ polinom ise $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Örnek: $\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+5)=2.2^2-3.2+5=7$

Örnek: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-4}{3x+2}=\frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+x-4)}{\lim_{x\to 1}(3x+2)}=\frac{2.1^2+1-4}{3.1+2}=-\frac{1}{5}$

Sıkıştırma (Sandviç) Teoremi: $A\subset\mathbb{R}$, $f,g,h:A\to\mathbb{R}$

Her $x\in A$ için $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ ve $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=L$ ise $\lim_{x\to x_0} g(x)=L$ olur.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunabiliyorsa x x_0 a soldan yaklaşırken f in limiti L dir denir ve $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ yazılır.

Benzer şekilde, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunabiliyorsa x x_0 a sağdan yaklaşırken f in limiti L dir denir ve

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ yazılır.

Teorem: $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ise

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ dir.

Uyarı: Fonksiyonun x_0 da sağ veya sol limitlerinden birisi yoksa veya sağ ve sol limitleri farklı ise fonksiyonun x_0 da limiti yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 3} |x-3| = ?$

$$\lim_{x \to 3^-} |x-3| = \lim_{x \to 3^-} (3-x) = 0, \quad \lim_{x \to 3^+} |x-3| = \lim_{x \to 3^+} (x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} |x-3| = \lim_{x \to 3^+} |x-3| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 3} |x-3| = 0$$

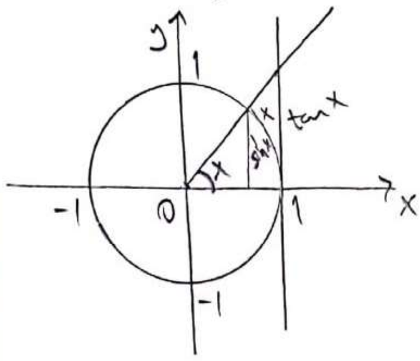
Örnek: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ \frac{x}{2}, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Sağ ve sol limitler farklı olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ limiti yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim:

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için birim çemberi göz önüne alalım.



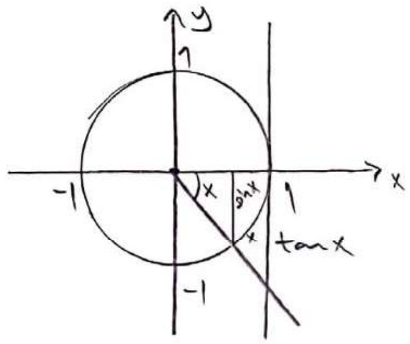
$$\sin x \leq x \leq \tan x \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \,, \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$\Rightarrow$ Sıkıştırma teoremine göre $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ dır.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ için birim çemberi ele alalım.



$$\tan x \leq x \leq \sin x \qquad (\sin x < 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{\sin x} \geq \frac{x}{\sin x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \geq \frac{x}{\sin x} \geq 1$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \Rightarrow$ Sıkıştırma teoremine göre

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Örnek: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2} = ?$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2-x}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1 \\ &\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1 \end{aligned}\right\}$$

Sağ ve sol limitler farklı $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ yoktur.

Tanım: $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $x > M$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $M > 0$ varsa x sonsuza giderken $f(x)$ L ye gider denir ve $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ yazılır.

Benzer şekilde her $\varepsilon > 0$ için $x < M$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $M < 0$ sayısı varsa x eksi sonsuza giderken $f(x)$ L ye gider denir ve $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ yazılır.

Örnek: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $x > M$ olduğunda $|f(x) - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı bulmalıyız.

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{M} \Rightarrow M = \frac{1}{\varepsilon} \text{ olarak seçersek}$$

$|f(x)| < \varepsilon$ elde edilir.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x x_0 a giderken f in limiti sonsuzdur denir ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ yazılır.

Benzer şekilde, her $\varepsilon < 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $f(x) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x x_0 a giderken f in limiti eksi sonsuzdur denir ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ yazılır.

Örnek: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğunu gösterelim:

$\varepsilon > 0$ verilsin. $0 < |x| < \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{1}{\delta^2} = \varepsilon \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{O halde } \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ olarak seçersek}$$

$f(x) > \varepsilon$ elde edilir.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x > \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x sonsuza giderken f in limiti sonsuzdur denir ve $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ yazılır.

Diğer tanımlar da benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı:
$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \mp\infty, & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

Örnek: $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 1}{9x^2 + 2x - 5} = \frac{5}{9}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{-2x + 5} = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = -\infty$$

Belirsizlikler

$x \to x_0$ veya $x \to \mp\infty$ iken $\lim f(x)$ ve $\lim g(x)$ var ve $\lim g(x) \neq 0$ ise $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ olduğunu biliyoruz. Eğer $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ ise bu kuralı uygulayamayız. Bu durumda belirsizlik adı verilen biçim ile karşılaşırız. Bu belirsizlik $\left(\frac{0}{0}\right)$ ile gösterilir. Bunun dışında $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$ durumları da $\frac{0}{0}$ biçimine getirilebileceği için belirsizlik adını alır.

Örnek: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = ?$

$x \to 1$ iken $x^2 + 2x - 3 \to 0$, $x - 1 \to 0$ olduğundan $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = ?$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right)$

$= \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}\right) = 1 \cdot \dfrac{1}{\cos 0} = 1$

Örnek: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = ?$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\overset{-1}{\cancel{\sin x - \cos x}}}{(\cancel{\cos x - \sin x})(\cos x + \sin x)}$

$= -\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Örnek: $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-4}) = ?$

$x \to \infty$ iken $\sqrt{x^2+x}$ ve $\sqrt{x^2-4}$ sonsuza gider ve $\infty - \infty$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizlikten kurtulmak için fonksiyonu eşleniği ile çarpıp böleriz.

$\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-4}) = \lim\limits_{x\to \infty}\left[(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-4}) \dfrac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-4}}\right]$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + 4}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cancel{x}(1 + \overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x}(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}})} = \dfrac{1}{2}.$

Örnek: $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = ?$

$(\infty \cdot 0)$ belirsizliği: $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

$\frac{1}{x} = t$ dersek

$x \to \infty$ iken $t \to 0^+$