Asimptotlar

Tanım: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ oluyorsa $y=b$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotudur denir.

Örnek: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$ olduğundan

$y=3$ doğrusu $y=\frac{3x^2+1}{x^2+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotudur.

Uyarı: Eğri, yatay asimptotunu kesebilir.

Örnek: $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulalım:

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \sin x \leq 1$ dir.

$x \to \infty$ iken $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ olur.

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğundan sandviç teoremine göre $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ olur.

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 2$

$\Rightarrow x \to \infty$ iken $y=2$ yatay asimptottur.

Benzer şekilde $x \to -\infty$ iken de $y=2$ nin yatay asimptot olduğu gösterilebilir.

Eğik asimptot

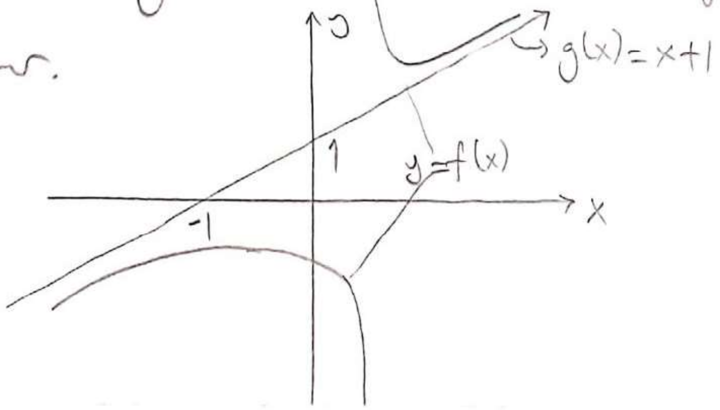
Rasyonel bir fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden bir fazla ise fonksiyonun bir eğik asimptotu vardır. Fonksiyonu bir lineer fonksiyon ile $x \to \mp\infty$ iken limiti sıfıra giden bir kalanın toplamı olarak yazmak için pay paydaya bölünür.

Örnek: $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulalım:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \hline -x^2-x & x+1 \\ \hline x+1 & \\ -x-1 & \\ \hline 2 & \end{array} \quad \Rightarrow f(x)=x+1+\frac{2}{x-1}$$

$x\to\mp\infty$ iken $\frac{2}{x-1}\to 0$ olacağı için $f(x)$ fonksiyonu $g(x)=x+1$ doğrusuna yaklaşır.

$\Rightarrow$ $g(x)=x+1$ doğrusu $x\to\mp\infty$ iken $f(x)$ in eğik asimptotudur.



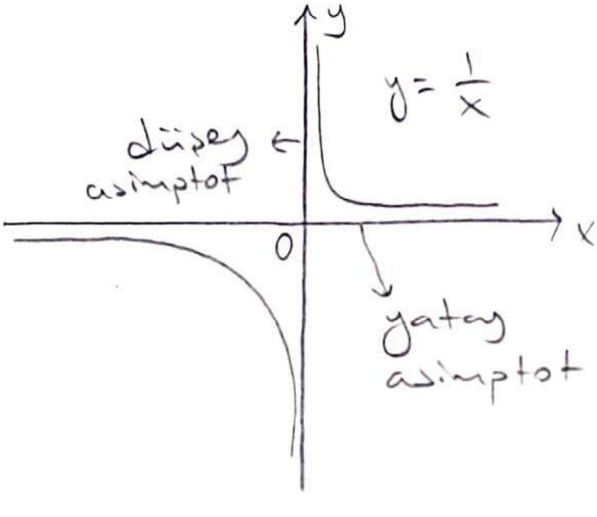
Tanım: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mp\infty$ veya $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\mp\infty$ oluyorsa $x=x_0$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun bir dikey (düşey) asimptotu denir.

Örnek: $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulalım.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \Rightarrow x=0$ sağdan düşey asimptot

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \Rightarrow$ " soldan " "

Örnek



Ayrıca $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x}=0$ olduğu için $y=0$ $x\to\mp\infty$ iken yatay asimptot

Uyarı: Eğri düşey asimptotu kesmez.

Örnek: $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

Önce fonksiyonun tanım kümesini belirleyelim.

$$\frac{x-1}{x+1}>0 \Rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

$\Rightarrow \mp 1$ de düşey asimptot olabilir.

$$\lim_{x\to 1^+}\ln\frac{\overset{\to 0^+}{(x-1)}}{\underset{\to 2}{(x+1)}}=-\infty \Rightarrow x=1 \text{ sağdan düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\ln\frac{(x-1)^{\to -2}}{(x+1)_{\to 0^-}}=\infty \Rightarrow x=-1 \text{ soldan düşey asimptot.}$$

Yatay asimptotları inceleyelim:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln 1=0 \Rightarrow y=0 \text{ yatay asimptot.}$$

Süreklilik

Tanım: $f: A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0\in A$ olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

O halde f in x_0 da sürekli olması için

1) f, x_0 da tanımlıdır,

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vardır,

3) $f(x_0)$ ile $\lim_{x\to x_0} f(x)$ eşittir

şartlarının sağlanması gerekir.

Eğer f fonksiyonu tanım kümesindeki her noktada sürekli ise f e sürekli fonksiyon denir.

Uyarı: $D_f=[a,b]$ ise $x=a$ ve $x=b$ de süreklilik için a da sağ, b de sol limitlere bakılır.