DİFERANSİYEL DENKLEMLER -I-

1. Giriş ve Temel Kavramlar

Tanım: İçinde bilinmeyen bulunan eşitliklere **denklem** denir ve bu bilinmeyeni bulma işlemine de **denklemi çözmek** denir.

$2x+5=7$ Hangi sayının 2 katının 5 fazlası 7 olur sorusunu soran bir denklemdir, yani x kaçtır? $x=1$ değeri denklemin çözümüdür.

Diferansiyel denklem ifadesinde denklem sözcüğü olduğu için içinde bilinmeyen bulunan bir eşitlikten söz edeceğiz demektir. Diğer kelime olan diferansiyel, türevi yani değişimi ifade eder. Bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre değişim oranına türev dendiğini biliyoruz.

→ O halde diferansiyel denklem içinde türeve bağlı bilinmeyen bulunan eşitliği ifade eder ve bu eşitliğin çözümünü yani türevi alınan fonksiyonu araştıracağız.

- $y'=0$
- $\dfrac{dy}{dx}=0$

$\Big\}$ Türevi sıfır olan $y(x)$ fonksiyonu nedir? Hızı sıfır olan hareketlinin konumu nedir?

Scanned with CamScanner

Tanım: Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bağıntıya **diferansiyel denklem** denir.

Örnek: • $\frac{dy}{dx} = \cos x$ veya $y' = \cos x$, $y = y(x)$

• $\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3 - x\frac{dw}{dx} + w = 0$,

• $\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$,

• $\sin y' = y' + x + 3$,

$\Rightarrow$ Hepsi birer diferansiyel denklemdir.

• $\cos x\,dx - dy = 0$ diferansiyel formda bir diferansiyel denklemdir.

• $\sin x + y = 2$ $\Rightarrow$ türev içermediğinden diferansiyel denklem değildir.

Scanned with CamScanner

• $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$ $\Rightarrow$ özdeşlik olup diferansiyel denklem değildir.

Tanım: Bağımlı değişkenin (veya değişkenlerin) bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme **adi diferansiyel denklem** denir.

Genel olarak y bağımlı, x bağımsız değişkenli bir adi diferansiyel denklem

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır. Burada $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ dir.

Tanım: Bağımlı değişkenin (veya değişkenlerin) birden çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme **kısmi diferansiyel denklem** denir.

Genel olarak z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \ldots) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır. Burada $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, $z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots$ şeklindedir.

Örnekler

① $x\dfrac{d^3x}{dt^3}+x^2\dfrac{dx}{dt}+x=\sin t$, $x=x(t)$ şeklinde adi diferansiyel denklem

② $\left.\begin{array}{l} y^{(n)}=0 \\ e^{y'}+\sin y=0 \end{array}\right\}$ y bağımlı değişken, bağımsız değişken belli değil $y=y(t)$, $y=y(x)$ ... olabilir, adi diferansiyel denklemler

③ $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)^2=v^2$, $v=v(s,t)$ şeklinde kısmi dif. denk

④ $u_{tt}+a u_t=c^2 u_{xx}$, a,c sabit, $u=u(x,t)$ kısmi dif denk

⑤ $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$ adi dif denk

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ yazılırsa y bağımlı, x bağımsız değişken olur

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ yazılırsa x bağımlı, y bağımsız değişken olur

Scanned with CamScanner

→ Bu derste sadece adi dif denkler ile ilgileneceğiz ve buna kısaca dif denk diyeceğiz.

Tanım: Bir diferansiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine **diferansiyel denklemin mertebesi** denir.

Tanım: Bir diferansiyel denklem var olan tüm türevlere göre bir polinom denklem biçiminde ise (tüm türevlerin kuvvetleri doğal sayı ise) en yüksek mertebeden türevin kuvvetine **diferansiyel denklemin derecesi** denir.

Örnekler

① $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$, 3. mertebe, 1. derece

② $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$, 2. mertebe, 1. derece

③ $(y'')^{2/3} = 1 + (y')^2$, rasyonel kuvvet tamsayı yapılmalı

$\Rightarrow (y'')^2 = (1 + (y')^2)^3$, 2. mertebe, 2. derece

④ $(1+(y')^2)^{2/3} = y''$

$\Rightarrow (1+(y')^2)^2 = (y'')^3$, 2. mertebe 3. derece

⑤ $y'' + (y')^2 = \ln y'$, 2. mertebe 1. derece

⑥ $y'' + (y)^2 = \ln y''$. 2. mertebe, derecesi tanımlı değil

⑦ $\sin y' = y' + x$, 1. mertebe, derecesi tanımlı değil

⑧ $e^{y'} + x = 1$

$\Rightarrow e^{y'} = 1 - x$

$\Rightarrow y' = \ln(1-x)$, 1. mertebe, 1. derece

⑨ $e^{y'} + x = y'$. 1. mertebe, derece tanımlı değil

$\Rightarrow$ Her dif denk mertebeye sahiptir fakat dereceye sahip olmayabilir!!

Scanned with CamScanner

Tanım: Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve türevleri 1. dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişken ve türevler çarpım halinde değilse böyle denklemlere **lineer (doğrusal) diferansiyel denklem** denir aksi halde **lineer olmayan diferansiyel denklem** denir.

y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere n. mertebeden bir lineer diferansiyel denklem

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = Q(x)$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $Q(x) \equiv 0$ ise denkleme **homojen diferansiyel denklem**, aksi halde **homojen olmayan diferansiyel denklem** denir.

→ Tüm diferansiyel denklemleri kapsayan genel bir çözüm yöntemi yoktur.

→ Denklemin mertebesi, derecesi, lineerliği, homojenliği gibi durumlara göre değişik metotlar vardır.

Katsayılar $a_i(x)$ şeklinde ise <u>değişken katsayılı</u>

$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ ise sabit katsayılı dif denk denir.

CS Scanned with CamScanner

Örnek: Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sınıflandırınız.

① $y'' + \cos x \, y = \sin x$

2.M, 1.D, değişken katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk

② $y'' + \cos x \, y y' = \sin x$

2.M, 1.D, lineer olmayan dif denk

③ $y' = 1 + x y^2$

1.M, 1.D, lineer olmayan dif denk

④ $y'' + 5y' + by = e^x$

2.M, 1.D, sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk

⑤ $(y'')^{1/3} = (1+y')^{5/2} \Rightarrow (y'')^2 = (1+y')^{15}$

2.M, 2.D, lineer olmayan dif denk

CS Scanned with CamScanner

6) $y'' + x\sin y = 0$

2.M, 1.D, lineer olmayan dif denk

7) $y'' + \sin x . y = 0$

2.M, 1.D, değişken katsayılı, lineer, homojen dif denk

8) $\sin x\, y''' - \cos x\, y' = 2$

3.M, 1.D, değişken katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk

9) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{2}{x^2}$

2.M, 1.D, lineer olmayan dif denk

10) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{2}{t^2}$ $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2}{t^2} = 0 \right)$

2.M, 1.D, sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk

CS Scanned with CamScanner

Tanım: n. mertebeden

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

diferansiyel denklemi verilsin. Reel sayıların bir I alt aralığında tanımlı ve bu aralıkta n. mertebeye kadar türevlenebilir bir $\phi(x)$ fonksiyonu var olsun. Eğer (1.1) denkleminde y yerine $\phi(x)$ yazıldığında denklem özdeş olarak sağlanıyorsa yani her $x \in I$ için

$$f(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

oluyorsa $y = \phi(x)$ fonksiyonuna I aralığında (1.1) denkleminin **açık çözümü** denir.

Eğer $G(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonu bir I aralığında (1.1) denklemini sağlarsa buna (1.1) denkleminin **kapalı çözümü** denir.

$y = \phi(x)$ çözümünün grafiği düzlemde bir eğri belirtir ve bu eğriye **integral eğrisi** denir.

→ Açık veya kapalı çözüme kısaca çözüm diyeceğiz

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $y'-y=0$ denklemi verilsin.

ⓐ $y_1=e^x$ ⓑ $y_2=ce^x,\ c\in\mathbb{R}$ ⓒ $y_3=e^{-x}$

fonksiyonlarının çözüm olup olmadığını gösteriniz.

ⓐ $y_1=e^x$ fonksiyonunun çözüm olması için denklemi sağlaması gerekir yani $y_1'-y_1=0$ olmalıdır. Gerçekten $y_1=e^x$ için $y_1'=e^x$ olup $y_1'-y_1=e^x-e^x=0$ sağlanır. O halde $y_1=e^x$ denklemin bir açık çözümüdür.

ⓑ $y_2=ce^x$ için $y_2'-y_2=0$ sağlanır mı bunu kontrol edelim:
$y_2'=ce^x$ olup $y_2'-y_2=ce^x-ce^x=0$ sağlanır. O halde $y_2=ce^x$ de bir açık çözümdür.

ⓒ $y_3=e^{-x}$ için $y_3'-y_3=0$ sağlanır mı?
$y_3'=-e^{-x}$ olup $y_3'-y_3=-e^{-x}-e^{-x}=-2e^{-x}\neq 0$ olduğundan denklemi sağlamaz. Bu nedenle $y_3=e^{-x}$ çözüm değildir.

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $y'' + y = 0$ denklemi verilsin.

ⓐ $y_1 = \cos x$ ⓑ $y_2 = \sin x$ ⓒ $y_3 = 2\sin x + 3\cos x$ ⓓ $y_4 = \sin 2x$

fonksiyonlarının çözüm olup olmadığını gösteriniz.

ⓐ $y_1 = \cos x$ için $y_1' = -\sin x$, $y_1'' = -\cos x$ olduğundan

$y_1'' + y_1 = -\cos x + \cos x = 0$ olup denklem sağlandığı için $y_1 = \cos x$ bir açık çözümdür.

ⓑ $y_2 = \sin x$ için $y_2' = \cos x$, $y_2'' = -\sin x$ olduğundan

$y_2'' + y_2 = -\sin x + \sin x = 0$ olup denklem sağlandığı için $y_2 = \sin x$ bir açık çözümdür.

ⓒ $y_3 = 2\sin x + 3\cos x$ için $y_3' = 2\cos x - 3\sin x$, $y_3'' = -2\sin x - 3\cos x$

$y_3'' + y_3 = -2\sin x - 3\cos x + 2\sin x + 3\cos x = 0$ olduğundan

$y_3 = 2\sin x + 3\cos x$ de bir çözümdür.

Scanned with CamScanner

Benzer şekilde

$y = \sin x + 5\cos x$, $\quad y = -3\sin x - 50\cos x$, $\quad y = 40\sin x - \frac{3}{5}\cos x \ldots$

fonksiyonları da birer çözümdür.

d) $y_4 = \sin 2x$ için $y_4' = 2\cos 2x$, $y_4'' = -4\sin 2x$

$y_4'' + y_4 = -4\sin 2x + \sin 2x = -3\sin 2x \neq 0$ olduğundan

$y_4 = \sin 2x$ çözüm değildir.

Örnek: $x^2+y^2-25=0$ fonksiyonu $(-5,5)$ aralığında $x+yy'=0$ denkleminin bir çözümüdür (kapalı çözümü).

Gerçekten $G(x,y)=x^2+y^2-25=0$ kapalı fonksiyonların türevinden

$$y' = -\frac{G_x}{G_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$ olup denklemde yazılırsa

$$x+yy' = x+y\left(-\frac{x}{y}\right) = x-x=0$$ şeklinde denklemi

sağlar. O halde $G(x,y)=x^2+y^2-25=0$ denklemin bir kapalı çözümüdür.

$x^2+y^2-25=0$ dan y yi çekersek $y=\mp\sqrt{25-x^2}$ olur.

Buradan türev alırsak

$$y' = \mp\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \pm\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$ elde edilir.

y ve y' fonksiyonları $25-x^2>0$ için tanımlı olacağından

$$x^2<25$$

$$|x|<5$$

$$-5<x<5$$

olan x ler için tanımlı olurlar.

Scanned with CamScanner

O halde $(-5,5)$ aralığındaki x ler için

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

kapalı fonksiyonundan

$$y_1(x) = \sqrt{25-x^2} \quad \text{ve} \quad y_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$$

fonksiyonları elde edilir ve bunlar birer açık çözümdür.

- $y_1(x) = \sqrt{25-x^2}$ için $x + y_1 y_1' = 0$?

$$y_1'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$x + y_1 y_1' = x + \sqrt{25-x^2} \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \right) = x - x = 0$$ olup denklemi

sağladığı için çözümdür.

- $y_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$ için de $x + y_2 y_2' = 0$ olduğu benzer şekilde

gösterilir.

Scanned with CamScanner

Örnek: $x+y+e^{xy}=0$ fonksiyonu $(1+xe^{xy})y'+1+ye^{xy}=0$ denkleminin kapalı çözümüdür. Gerçekten

$$G(x,y) = x+y+e^{xy} = 0 \quad \text{kapalı fonksiyonundan}$$

$$y' = -\frac{G_x}{G_y} = -\frac{1+ye^{xy}}{1+xe^{xy}} \quad \text{dur.}$$

$$(1+xe^{xy})y'+1+ye^{xy} = \cancel{(1+xe^{xy})}\left(-\frac{1+ye^{xy}}{\cancel{1+xe^{xy}}}\right)+1+ye^{xy}$$

$$= -1-ye^{xy}+1+ye^{xy} = 0$$

olduğundan denklemi sağlar ohalde $G(x,y)=x+y+e^{xy}$ bir kapalı çözümdür.

- $G(x,y)=0$ kapalı fonksiyonu bazı aralıklarda $y=f(x)$ şeklinde bir açık fonksiyon tanımlar fakat bunu kolaylıkla bulamayız.

★★ $x^2+y^2+1=0$ biçimsel olarak $xdx+ydy=0$ denklemini sağlamakla beraber denklemin bir kapalı çözümü değildir. Çünkü $x^2+y^2=-1$ bağıntısı reel sayılarda anlamsızdır.

★★ $(y')^2+y^2=-1$ denkleminin bir reel çözümü mevcut değildir.

★★ $(y')^2+y^2=0$ denkleminin bir tek $y=0$ çözümü vardır.

→ Bu durumların dışında bir diferansiyel denklem sonsuz çözüme sahiptir.

Şimdi bu çözümleri isimlendirelim:

Tanım: n. mertebeden

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

diferansiyel denklemi verildiğinde bu denklemin $c_1, c_2, \dots, c_n$ gibi birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit içeren

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

çözümüne diferansiyel denklemin genel çözümü (ilkeli) denir.

Bu genel çözümdeki keyfi sabitlere belli değerler verilerek elde edilen çözüme diferansiyel denklemin özel çözümü denir.

Genel çözümdeki keyfi sabitlerin herhangibir seçimi ile elde edilemeyen çözüme diferansiyel denklemin tekil (aykırı, singüler) çözümü denir.

➡ Bu çözümlerin hepsi de denklemi sağlar.

➡ Genel çözümde diferansiyel denklemin mertebesi kadar birbirinden bağımsız keyfi sabit vardır.

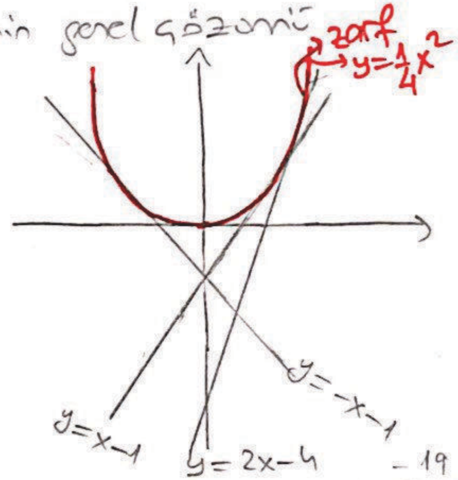
Scanned with CamScanner

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü
$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$ dır.
Denklem 2. mertebeden olduğu için c_1, c_2 şeklinde iki tane lineer bağımsız keyfi sabit vardır genel çözümde.

$c_1 = 5, \; c_2 = 2$ için $\quad y = 5e^{x} + 2e^{2x}$ bir özel çözümdür

$c_1 = 0, \; c_2 = -\frac{1}{2}$ için $\quad y = -\frac{1}{2} e^{2x}$ bir özel çözümdür.

Örnek: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü
$y = cx - c^2$ şeklinde doğru ailesidir.



- $c = 1$ için $\quad y = x - 1$
  $c = 2$ için $\quad y = 2x - 4$
  $c = -1$ için $\quad y = -x - 1$
  $\Bigg\}$ özel çözümler
- $y = \frac{1}{4}x^2$ genel çözümün zarfı olup bir tekil çözümdür.

Scanned with CamScanner

Örnek: $y' = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü ve birkaç özel çözümünü bulunuz.

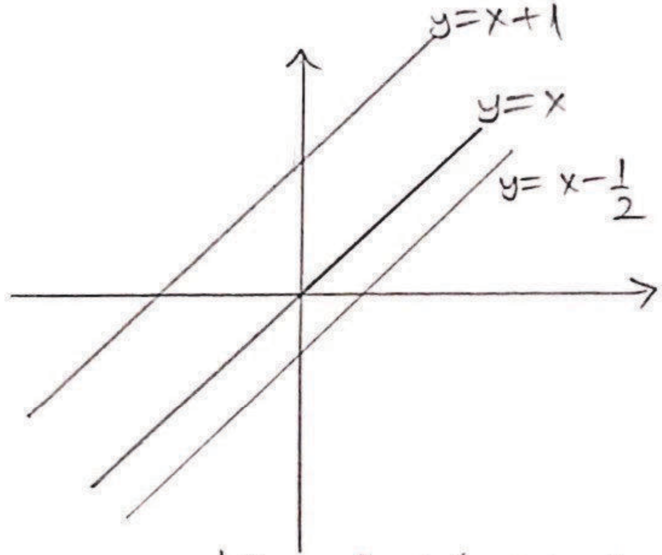
$$y' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow dy = dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int dx$$

$$\Rightarrow y = x + c \quad \text{genel çözüm}$$



doğru ailesi (eğri ailesi)

$c = 0$ için $y = x$

$c = 1$ için $y = x + 1$

$c = -1/2$ için $y = x - \frac{1}{2}$

birer özel çözümdür.

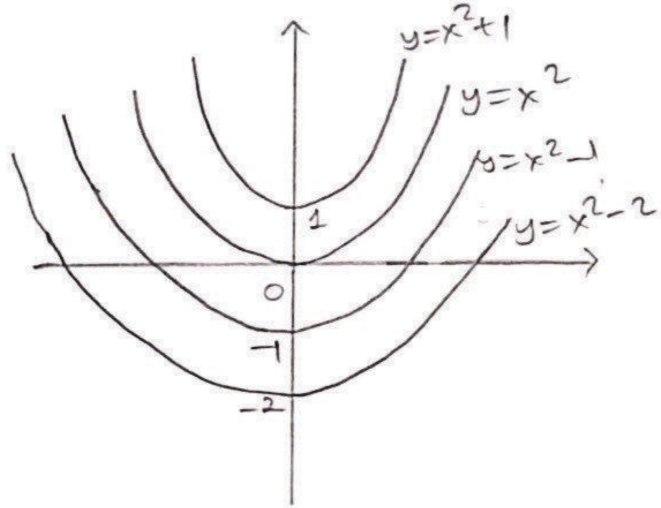
Örnek: $y' = 2x$ denkleminin genel çözümünü ve birkaç özel çözümünü bulunuz.

$$y' = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dy = 2x\,dx$$

$$\Rightarrow y = x^2 + C \quad \text{genel çözüm}$$



parabol ailesi
(eğri ailesi)

$$\left.\begin{array}{ll} C=0 \text{ için} & y=x^2 \\ C=1 \text{ için} & y=x^2+1 \\ C=-1 \text{ için} & y=x^2-1 \\ C=-2 \text{ için} & y=x^2-2 \end{array}\right\} \text{özel çözüm}$$

Örnek: $y'' - e^x = 0$ denkleminin genel çözümünü ve birkaç özel çözümünü bulunuz

$$y'' = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{d(y')}{dx} = e^x$$

$$\Rightarrow \int d(y') = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow y' = e^x + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x + c_1$$

$$\Rightarrow \int dy = \int (e^x + c_1)\, dx$$

$\Rightarrow y = e^x + c_1 x + c_2$ genel çözümü bulunur.

$c_1 = 0, c_2 = 0 \Rightarrow y = e^x$

$c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \Rightarrow y = e^x + x + 2$

birer özel çözümdür.

CS Scanned with CamScanner

Tanım: n-inci mertebeden $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ diferansiyel denklemi verilsin. $x_0 \in I$ ve $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ verilmiş sabitler olmak üzere I aralığındaki bir x_0 noktasında bu denklemin

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

şeklinde n tane başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümünün bulunması problemine **başlangıç değer problemi** denir.

→ Mertebe kadar koşul olması gerekir.

Örnek: $y' = 1$ denkleminin $y(-1) = 1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz. ($(-1,1)$ noktasından geçen integral eğrisini bulunuz)

$$y' = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx \Rightarrow y = x + c$$ genel çözümdür.

$y(-1) = 1$ koşulunu sağlayan çözüm $x = -1$ için $y = 1$ olacağından

$1 = -1 + c \Rightarrow c = 2$ olup istenen özel çözüm

$y = x + 2$ olarak bulunur.

Scanned with CamScanner

Örnek: $y'' = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x \Rightarrow \frac{d(y')}{dx} = \sin x \Rightarrow \int d(y') = \int \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow y' = -\cos x + c_1$$

$$\Rightarrow dy = (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$\Rightarrow y = -\sin x + c_1 x + c_2$$ genel çözümdür.

$y(0) = 0$ için $\quad 0 = -\sin 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$ olur.

$y'(0) = 1$ için $\quad y' = -\cos x + c_1$ olduğundan

$$1 = -\underbrace{\cos 0}_{1} + c_1 \Rightarrow c_1 = 2$$ olur.

O halde istenen çözüm

$$y = -\sin x + 2x$$

olarak bulunur.