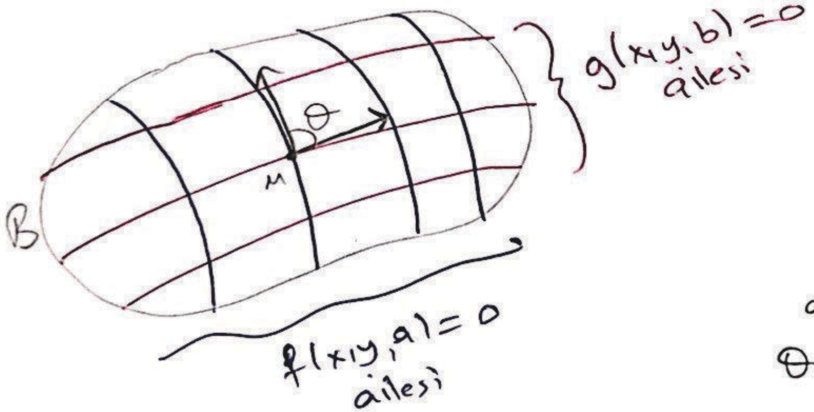
3. Yörüngeler

xy düzleminin bir B bölgesinde tanımlı bir $f(x,y,a)=0$ eğri ailesi verilmiş olsun. B nin her bir noktasından f nin yalnız bir eğrisinin geçtiğini ve bu eğrilerin her bir noktasında teğetlerinin olduğunu varsayalım.

Şimdi B bölgesinde f nin tüm eğrilerini kesen ve f deki eğrilerle aynı özellikte olan eğrilerin oluşturduğu ikinci bir eğri ailesi $g(x,y,b)=0$ olsun.



Bilindiği üzere iki eğri arasındaki açı, bu eğrilerin kesiştiği noktadaki teğetleri arasındaki açıya denir. Şekildeki θ açısı f ve g eğrileri arasındaki açıyı gösterir.

Eğer g eğri ailesinin her eğrisi f eğri ailesinin her eğrisini sabit θ açısı altında kesiyorsa g eğri ailesine f nin **yörüngeleri** denir. (f ailesi de g nin yörüngeleri olur)

Eğer $\theta = 90^\circ$ ise yörüngelere **dik yörüngeler**, $\theta \neq 90^\circ$ ise yörüngelere **eğik yörüngeler** denir.

Amacımız verilen $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin dik ve eğik yörüngelerini bulmaktır.

Dik Yörüngeleri Bulma: $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin diferansiyel denklemi

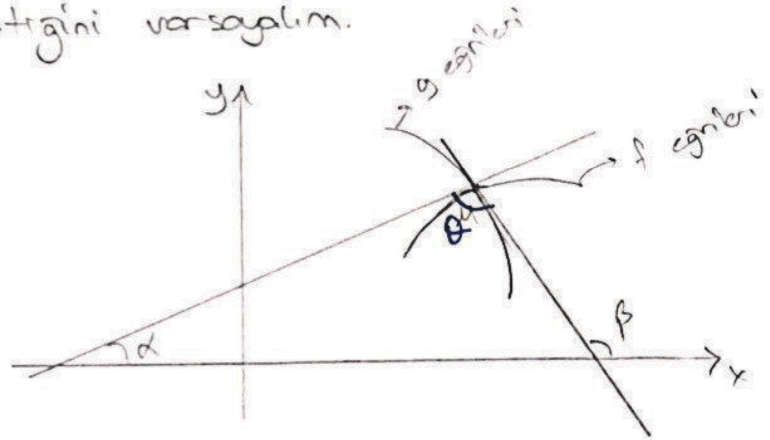
$$F(x,y,y') = 0 \quad --- (3.1)$$

olsun. Burada y', f eğri ailesine ait ve bir M noktasından geçen eğrinin bu noktadaki teğetinin eğimidir. g deki eğriler f deki eğrilere dik olduğundan g deki eğrilerin aynı M noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{-1}{y'}$ dır. Öyleyse (3.1) de y' yerine $\frac{-1}{y'}$ yazılarak elde edilen

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad --- (3.2)$$

diferansiyel denklemi dik yörüngelerin diferansiyel denklemi dir. (3.2) nin çözümü $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin dik yörüngelerini verir, bu da $g(x,y,b)=0$ şeklindedir.

Eğik Yörüngeleri Bulma: Denklemleri $f(x,y,a)=0$ olan f eğri ailesi ile θ açısı yapan bir g eğri ailesinin denklemini bulalım. f ve g ailelerinin herhangi iki eğrisinin kesiştiği nokta $M(x,y)$ olsun. f ye ait eğrinin M noktasındaki teğeti x eksenini α açısı ile kessin. g eğri ailesine ait eğrinin M noktasındaki teğetinin x eksenini β açısı ile kestiğini varsayalım.



$$\alpha+\theta=\beta$$
$$\alpha=\beta-\theta$$
yazılır. Buradan
$$\tan\alpha=\tan(\beta-\theta)$$
$$\tan\alpha=\frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta.\tan\theta}$$

elde edilir. Türevin geometrik yorumundan

$\tan\alpha$, f ye ait eğrinin M deki teğetin eğimi olup $y'_f=\tan\alpha$

$\tan\beta$, g ye " " " " " " $y'_g=\tan\beta$

şeklindedir

O halde eğriler arasında

$$y_f' = \frac{y_g' - \tan\theta}{1 + y_g' \tan\theta}$$

bağıntısı elde edilir.

f eğri ailesinin diferansiyel denklemi $f(x, y, y_f') = 0$ ise istenen g eğri ailesinin diferansiyel denklemi $f\left(x, y, \frac{y_g' - \tan\theta}{1 + y_g' \tan\theta}\right) = 0$ olur. Bu denklemin çözümü g eğri ailesi yani f eğri ailesinin eğik yörüngeleri olur.

$f(x, y, a) = 0$ eğri ailesinin θ açılı $g(x, y, b) = 0$ eğik yörüngesini bulmak için $f(x, y, y') = 0$ denkleminde

$\theta = 90°$ ise $y' \to -\frac{1}{y'}$ yazılır

$\theta \neq 90°$ ise $y' \to \frac{y' - \tan\theta}{1 + y' \tan\theta}$ yazılır

ve elde edilen denklemler çözülür.

Örnek: $x^2+y^2=c^2$ çemberler ailesinin dik yörüngelerini bulunuz.

Önce çember ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Bir kez türev alırsak (kapalı fonksiyon türevinden)

$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$ istenen diferansiyel denklemdir.

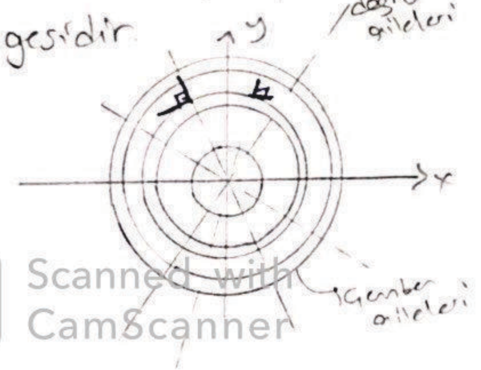
y' yerine $-\frac{1}{y'}$ yazarsak $-\frac{1}{y'}=-\frac{x}{y} \Rightarrow y'=\frac{y}{x}$ denklemi

dik yörüngelerin denklemi dur. Bunun çözümünden

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln b$

$y=bx$ doğrular ailesi

bulunur. Bu $y=bx$ doğrular ailesi $x^2+y^2=c^2$ çemberler ailesinin dik yörüngesidir.



$y=bx$ doğrular ailesinin dik yörüngeleri de $x^2+y^2=c^2$ çemberler ailesi olur.

Örnek: Merkezi y ekseni üzerinde ve yarıçapı, merkezin orjine uzaklığına eşit olan çemberler ailesinin dik yörünge ailesini bulunuz.

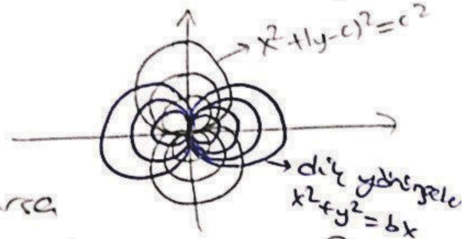
Bahsedilen çember ailesi $M(0,c)$, $r=c$ olmak üzere

$$x^2+(y-c)^2=c^2$$

şeklindedir. Yani $x^2+y^2-2yc=0$ dur. Bunun diferansiyel denklemi

$$2x+2yy'-2y'c=0 \Rightarrow c=\frac{x+yy'}{y'} \Rightarrow x^2+y^2-2y\cdot\left(\frac{x+yy'}{y'}\right)=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$ şeklindedir.



Dik yörünge denklemi için $y' \longrightarrow -\frac{1}{y'}$ yazılırsa

$$-\frac{1}{y'}=\frac{2xy}{x^2-y^2} \Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$ denklemi elde edilir. Bu

denklem homojen, Bernoulli ve tam hale gelebilen bir denklemdir.

Homojen denklem olarak; $y=ux$ ile $\frac{2u}{1+u^2}du=-\frac{dx}{x}$ dup $x^2+y^2=bx$ çözümü yani dik yörünge ailesi bulunur.

Bunlar $M\left(\frac{b}{2},0\right)$ $r=\frac{b}{2}$ olan çemberlerdir.

Örnek: $y^2 = 2(x-c)$ eğri ailesinin $45°$ lik yörüngesinin $(0,0)$dan geçen yörüngesini bulunuz.

Önce $y^2 = 2(x-c)$ eğri ailesinin denklemini bulalım.

$2yy' = 2 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{y}$ dur.

Eğik yörünge denklemi için $y' \longrightarrow \dfrac{y' - \tan\theta}{1 + y' \cdot \tan\theta} = \dfrac{y'-1}{1+y'}$ yazılırsa

$\theta = 45°$ için $\tan\theta = 1$

$$\frac{y'-1}{1+y'} = \frac{1}{y} \Rightarrow yy' - y = 1 + y' \Rightarrow y'(y-1) = 1+y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1+y}{y-1}$$ şeklinde

eğik yörünge denklemi elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle

$$\frac{y-1}{y+1}\,dy = dx \Rightarrow \int\left(\frac{y-1}{y+1}\right)dy = \int dx \Rightarrow \int\left(1 - \frac{2}{y+1}\right)dy = \int dx$$

$$\Rightarrow y - 2\ln(y+1) = x + \ln c \Rightarrow c(y+1)^2 = e^{y-x}$$

eğik yörünge ailesi bulunur. $(0,0)$ dan geçeni

$x=0,\ y=0$ için $c = e^0 = 1 \Rightarrow (y+1)^2 = e^{y-x}$ bulunur.