4 Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden

$$F(x,y,y') = 0 \quad \text{---} (4.1)$$

diferansiyel denklemi y' ne göre k. dereceden bir polinom denklem şeklinde ise denkleme k. derecedendir denir. Bu polinom k tane doğrusal çarpana ayrılabileceğinden

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_k(x,y)) = 0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan da

$$y' = f_1(x,y), \quad y' = f_2(x,y), \quad \ldots, \quad y' = f_k(x,y)$$

birinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilir. Her birinin integrali alınarak

$$f_1(x,y,c) = 0, \quad f_2(x,y,c) = 0, \quad \ldots \quad f_k(x,y,c) = 0$$

çözümleri bulunur. Bu fonksiyonların her biri (4.1) denklemini sağladığı gibi bunların çarpımından

$$f_1(x,y,c)\, f_2(x,y,c) \cdots f_k(x,y,c) = 0 \quad \text{---} (4.2)$$

fonksiyonu da (4.1) denklemini sağlar ve (4.1) denkleminin genel çözümü (4.2) dur.

Örnek: $(y')^2 - xy' - 6x^2 = 0$ (veya $y'^2 - xy' - 6x^2 = 0$ da yazılabilir)

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklem 1. mertebeden 2. dereceli lineer olmayan bir denklemdir. Denklemi çarpanlarına ayırırsak

$$y'^2 - xy' - 6x^2 = 0 \Rightarrow (y'-3x)(y'+2x) = 0$$ olur. Buradan

$$y' - 3x = 0 \quad \text{ve} \quad y' + 2x = 0$$

denklemleri elde edilir.

Not: Denklem 2. dereceden olduğu için düzlemin her bir noktasından iki integral eğrisi geçer.

$$y' - 3x = 0 \rightarrow dy = 3x\,dx \Rightarrow y = \frac{3x^2}{2} + c$$

$$y' + 2x = 0 \rightarrow dy = -2x\,dx \Rightarrow y = -x^2 + c$$

olup verilen denklemin genel çözümü

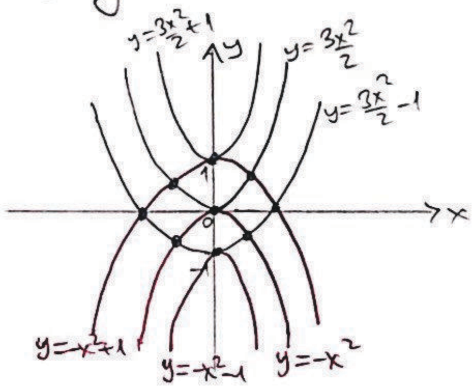
$$\left(y - \frac{3x^2}{2} - c\right)\left(y + x^2 - c\right) = 0$$

şeklinde bulunur.

$c = 0$ için $y = \frac{3x^2}{2}$ ve $y = -x^2$

$c = 1$ için $y = \frac{3x^2}{2} + 1$ ve $y = -x^2 + 1$

$c = -1$ için $y = \frac{3x^2}{2} - 1$ ve $y = -x^2 - 1$



Örnek: $(y'-1)(y'^2-4y)=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(y'-1)(y'-2\sqrt{y})(y'+2\sqrt{y})=0$ yazılırsa buradan

$y'-1=0 \Rightarrow y'=1 \Rightarrow dy=dx \Rightarrow y=x+c$

$y'-2\sqrt{y}=0 \Rightarrow y'=2\sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}=dx \Rightarrow \sqrt{y}=x+c$

$y'+2\sqrt{y}=0 \Rightarrow y'=-2\sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}=-dx \Rightarrow \sqrt{y}=-x+c$

bulunur ve genel çözüm

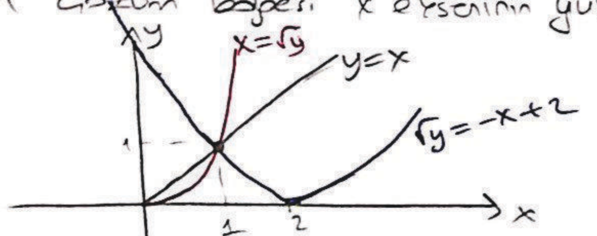
$(y-x-c)(\sqrt{y}-x-c)(\sqrt{y}+x-c)=0$ olur.

Not: Denklemin derecesi 3 olduğundan düzlemin her noktasından 3 tane eğri geçer. ($\sqrt{y}$ olduğundan $y\geq 0$ olacağından çözüm bölgesi x ekseninin yukarısıdır)

(1,1) noktası için $c=0 \Rightarrow y=x$

$c=0 \Rightarrow \sqrt{y}=x$

$c=2 \Rightarrow \sqrt{y}=-x+2$



Not: $y=0$ da denklemin çözümüdür fakat c'ye değer verilerek genel çözümden elde edilemediği için tekil çözümdür.

Şimdi de verilen bir denklemin tekil çözümü varsa nasıl bulunur, bunu inceleyelim.

Tekil Çözüm → p-diskriminantı

$$F(x,y,y')=0 \quad --- \quad (4.3)$$

denklemi verilsin. $y'=p$ gösterimini kullanırsak

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,p)&=0 \\ \frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}&=0 \end{aligned}\right\} --- (4.4)$$

sistemini sağlayan (x,y) noktalarının cümlesine (4.3) denkleminin p-diskriminant eğrileri denir.

Eğer mümkünse (4.4) denklemleri arasında p yok edilerek, p-diskriminant eğrilerinin $\phi(x,y)=0$ kartezyen denklemi elde edilir. Bu p-diskriminant eğrilerinden diferansiyel denklemi sağlayanlar denklemin tekil (aykırı, singüler) çözümüdür.

Örnek: $(y'-1)(y'^2-4y)=0$ denkleminin tekil çözümlerini bulunuz.

p-diskriminant eğrileri $y'=p$ olmak üzere

$$F(x,y,p) = (p-1)(p^2-4y)=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p} = p^2-4y+(p-1).2p=0$$

denklemleri arasında p yok edilerek elde edilir. Birinci eşitlikten $p=1$ ve $p^2=4y$ olup bunlar ikinci eşitlikte kullanılırsa

$p=1$ için $1-4y+0=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$ bulunur.

$p^2=4y$ için $\cancel{4y}-\cancel{4y}+(2\sqrt{y}-1)\,2.2\sqrt{y}=0 \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

$\sqrt{y}=0 \Rightarrow y=0$ dır.

O halde p-diskriminant eğrileri $y=0$ ve $y=\frac{1}{4}$ dır.

- $y=0$ için $y'=0 \Rightarrow (0-1)(0-4.0)=0$ olup denklem sağlandığı için $y=0$ tekil çözümdür.
- $y=\frac{1}{4}$ için $y'=0 \Rightarrow (0-1)\left(0-4.\frac{1}{4}\right)=(-1)(-1)=1\neq 0$ olup denklem sağlanmadığı için tekil çözüm değildir.

Örnek: $y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$ denkleminin varsa tekil çözümlerini bulunuz.

p diskriminant eğrileri $y' = p$ olmak üzere

$$F(x,y,p) = p^3 - 3x^2p + 4xy = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p} = 3p^2 - 3x^2 = 0$$

denklemleri arasında p yok edilerek elde edilir.

$3p^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow p^2 = x^2 \Rightarrow p = x$ ve $p = -x$ olur.

- $p = x$ için $x^3 - 3x^2x + 4xy = 0 \Rightarrow -2x^3 + 4xy = 0 \Rightarrow 2x(2y - x^2) = 0$
  $\Rightarrow x = 0$ ve $y = \frac{x^2}{2}$ bulunur.

- $p = -x$ için $-x^3 + 3x^3 + 4xy = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4xy = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 2y) = 0$
  $\Rightarrow x = 0,\ y = -\frac{x^2}{2}$ bulunur.

O halde $x = 0$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$ p-diskriminant eğrileridir. Bunlardan hangileri denklemi sağlar onu kontrol edelim:

- $x = 0$ için $y' = \frac{dy}{dx}$ ve $x' = \frac{dx}{dy}$ için $y' = \frac{1}{x'}$ olup denklem

$\frac{1}{x'^3} - 3x^2\frac{1}{x'} + 4x\,y = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2x'^2 + 4xy\,x'^3 = 0$ yazılabilir.

$x = 0$ için $x' = 0$ olup $1 - 3.0.0 + 4.0.y.0 = 1 \neq 0$ olacağından denklem sağlanmaz. Bu durumda $x=0$ tekil çözüm değildir.

- $y=\frac{x^2}{2}$ için $y'=x$ olup

$x^3-3x^2\cdot x+4x\cdot\frac{x^2}{2}=-2x^3+2x^3=0$ olacağından denklem sağlanır.

Bu durumda $y=\frac{x^2}{2}$ tekil çözümdür.

- $y=-\frac{x^2}{2}$ için $y'=-x$ olup

$-x^3-3x^2(-x)+4x\left(-\frac{x^2}{2}\right)=2x^2-2x^3=0$ olacağından denklem

sağlanır ve $y=-\frac{x^2}{2}$ de tekil çözümdür.

Zarf, c-diskriminant

Düzlemin bir A bölgesinde

$$g(x,y,c)=0 \quad \text{---} \quad (4.5)$$

bağıntısıyla bir eğri ailesi verilsin. Eğer herbir noktasında (4.5) eğri ailesinin bir eğrisine teğet olan (veya herbir noktasında (4.5) eğri ailesinin bir eğrisiyle ortak bir teğete sahip olan) bir eğri varsa bu eğriye (4.5) eğri ailesinin **zarfı** denir.

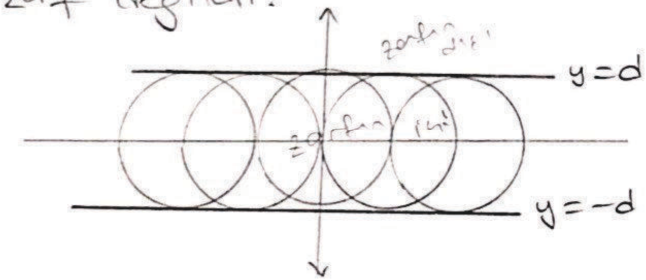
$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c)&=0 \\ \frac{\partial g(x,y,c)}{\partial c}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{---} \quad (4.6)$$

sistemini sağlayan (x,y) noktalarının cümlesine **c-diskriminant eğrileri** denir. Bu c-diskriminant eğrileri (4.6) bağıntıları arasında c yok edilerek elde edilir.

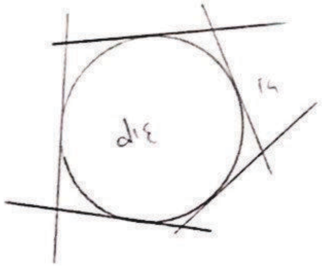
Not: Bir eğri ailesinin her zarfı bir c-diskriminant eğrisidir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani c-diskriminant eğrisi zarf olmak zorunda değildir.

Not: Her zarf bir tekil çözümdür. Fakat her tekil çözüm bir zarf değildir. z ⇒ tç , tç değilse zarf değil

Not: Bulunan tekil çözüm $g(x,y,c)=0$ eğri ailesinde yerine yazıldığında bu ifade c ye göre çift dereceden katlı kök ise bu tekil çözüm zarf olur. Eğer tek dereceden katlı kök ise zarf değildir.



$y=d$ ve $y=-d$ doğruları çember ailesinin zarfıdır.
(Bu doğrular çemberlerin tamamına teğettir)



Çember teğet doğrularının zarfıdır.

Örnek: $y=(x+c)^2$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.

c-diskriminant eğrilerini

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c) &= y-(x+c)^2=0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} &= -2(x+c)=0 \end{aligned}\right\}$$ denklemleri arasında c yok edilerek bulunur.

$$-2(x+c)=0 \Rightarrow c=-x \Rightarrow y-(x-x)^2=0 \Rightarrow y=0 \text{ dur.}$$

O halde $y=0$ c-diskriminant eğrisidir (veya c-tekil yeridir). Şimdi bunun tekil çözüm olup olmadığını kontrol edelim: Eğri ailesinin diferansiyel denklemini sağlarsa tekil çözüm dur.

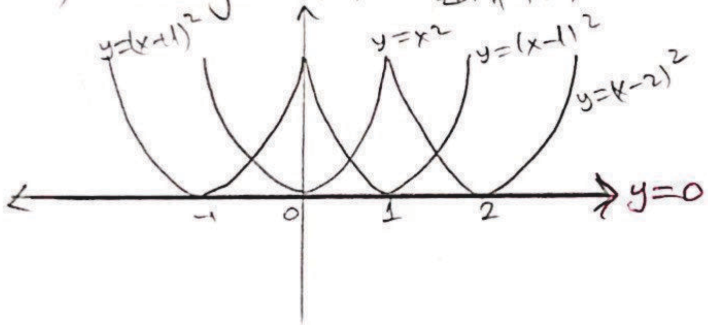
Önce $y=(x+c)^2$ eğri ailesinin denklemini bulalım.

$$y'=2(x+c) \Rightarrow x+c=\frac{y'}{2} \Rightarrow y=\left(\frac{y'}{2}\right)^2 \Rightarrow y'^2-4y=0$$

eğri ailesinin diferansiyel denklemidir.

• $y=0$ c-diskriminant eğrisi için $y'=0$ olup $0^2-4.0=0$ sağlandığından $y=0$ tekil çözümdür. Şimdi de bu tekil çözüm zarf olur mu onu kontrol edelim.

$y=0$ için $0=(x+c)^2 \Rightarrow x=-c$ katlı kök (çift dereceden katlı kök) olduğu için zarftır.



$y=(x+c)^2$

$c=0$ ise $y=x^2$

$c=1$ ise $y=(x+1)^2$

$c=-1$ ise $y=(x-1)^2$

$c=-2$ ise $y=(x-2)^2$

$y=0$ doğrusu (yani x ekseni) $y=(x+c)^2$ parabol ailesindeki tüm parabollere teğet olduğu için bu parabol ailesinin zarfıdır.

Örnek: $y=(x-c)^3+1$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c) &= y-(x-c)^3-1=0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} &= -3(x-c)^2(-1)=0 \end{aligned}\right\} \quad c=x \Rightarrow y=1 \text{ c-diskriminant}$$

eğrisidir. $y=1$ tekil çözüm müdür?

$y=(x-c)^3+1$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulalım

$y'=3(x-c)^2 \Rightarrow (x-c)^2=\frac{y'}{3}$ ve $(x-c)^3=y-1 \Rightarrow$

$y=(x-c)^3+1$ için $y'=3(x-c)^2$ dur.

$(x-c)^3=y-1$ ve $(x-c)^2=\dfrac{y'}{3} \Rightarrow (y-1)^2=\left(\dfrac{y'}{3}\right)^3 \Rightarrow y'^3=27(y-1)^2$

denklemi elde edilir.

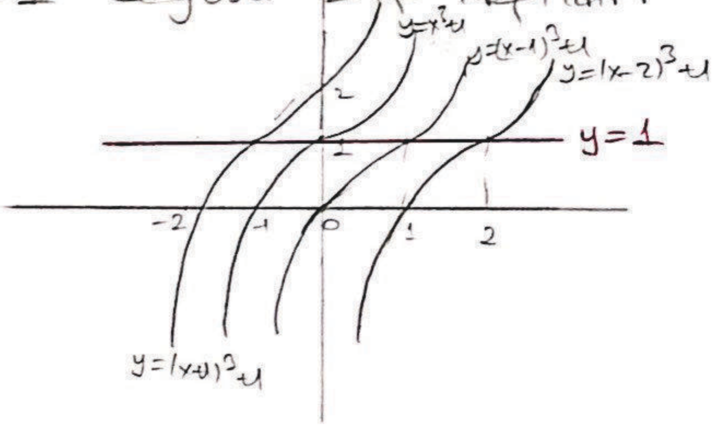
• $y=1$ için $y'=0$ olup $0=27(1-1)^2 \Rightarrow 0=0$ sağlanır.

O halde $y=1$ tekil çözümdür.

• $y=1$ için $y=(x-c)^3+1 \Rightarrow 1=(x-c)^3+1 \Rightarrow (x-c)^3=0$

olup $x=c$ 3 katlı kök (tek dereceden katlı kök) olduğundan

$y=1$ doğrusu zarf değildir.



$y=(x-c)^3+1$

$c=0$ ise $y=x^3+1$

$c=1$ ise $y=(x-1)^3+1$

$c=2$ ise $y=(x-2)^3+1$

$c=-1$ ise $y=(x+1)^3+1$

$y=1$ doğrusu $y=(x-c)^3+1$ ailesinin bütün noktalarından geçer bunlara teğet değildir o halde zarf değildir.