y ye yada x e Göre Çözülebilen Denklemler

$F(x,y,y')=0$ denklemi yüksek dereceden olduğu zaman y' ne göre açık olarak çözülemez veya y' ne göre lineer çarpanlara ayrılamaz. Bundan dolayı denklemin çözümlerini elde etmek için başka çözüm yolları aranır.

y ye göre çözülebilen denklemler:

$F(x,y,y')=0$ denklemi y ye göre çözülebilsin yani $y'=p$ olmak üzere

$$y=f(x,p) \quad --- (4.7)$$

biçiminde yazılabilsin. (4.7) nin x e göre türevini alalım:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} \quad -- (4.8)$$

elde edilir ve bu p ye göre birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Bilinen yöntemlerle çözümü yapılırsa genel çözümü

$$x=g(p,c)$$

biçimindedir. Bu $y=f(x,p)$ de yerine yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} x &= g(p,c) \\ y &= f(g(p,c), p) \end{aligned}\right\}$$

şeklinde $y=f(x,p)$ denkleminin p parametresine bağlı parametrik genel çözümü bulunmuş dur. Eğer bu denklemler arasından p yok edilirse

$$h(x,y,c)=0$$

genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek: $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ denkleminin çözümlerini (genel ve tekil çözümlerini) bulunuz.

$y'=p$ dersek ve $xp^2 - 2yp + x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{xp^2+x}{2p}$

$\Rightarrow y = \dfrac{xp}{2} + \dfrac{x}{2p}$ şeklinde y ye göre çözülebilir denklemdir

x e göre türev alırsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{2p} - \frac{x}{2p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$p = \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{p^2-1}{\cancel{2}p} = \frac{x(p^2-1)}{\cancel{2}p^{\cancel{2}}}\frac{dp}{dx} \qquad p = y' \neq 0$$

$$p(p^2-1) = x(p^2-1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow (p^2-1)\left(x\frac{dp}{dx} - p\right) = 0$$

$$\Rightarrow p^2 = 1 \quad \text{ve} \quad x\frac{dp}{dx} - p = 0 \quad \text{olur.}$$

• $x\frac{dp}{dx} - p = 0$, p ye göre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir ve çözümü

$$x\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln p = \ln x + \ln c \Rightarrow p = cx \quad \text{olur.}$$

O halde

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p}{c} \\ y &= \frac{p}{2}\left(\frac{p}{c}\right) + \frac{p}{2cp} \end{aligned}\right\}$$ parametrik genel çözümü bulunur. Buradan p yok edilirse $p = cx$ için

$$y = \frac{cx}{2}\cdot\frac{\cancel{c}x}{\cancel{c}} + \frac{1}{2c} \Rightarrow y = \frac{cx^2}{2} + \frac{1}{2c}$$

genel çözümü bulunur.

• $p^2=1$ den $p=\mp 1$ olup $y=\frac{xp}{2}+\frac{x}{2p}$ de yazılırsa

$y=x$ ve $y=-x$ bulunur.

• $y=x$ için $y'=1$ olup $x\cdot 1^2-2x\cdot 1+x=0$ şeklinde denklemi sağlar o halde $y=x$ tekil çözümdür.

• $y=-x$ için $y'=-1$ olup $x(-1)^2-2(-x)(-1)+x=0$ şeklinde denklemi sağlar o halde $y=-x$ tekil çözümdür.

Örnek: $y'^2x^4=y+y'x$ denkleminin genel çözümünü ve varsa tekil çözümünü bulunuz.

$y'=p$ için $p^2x^4=y+px \Rightarrow y=p^2x^4-px$ şeklinde y ye göre çözülmüş denklemdir. x e göre türev alırsak

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p}=4x^3p^2+2px^4\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 0=4x^3p^2-2p+(2px^4-x)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 0=2p(2x^3p-1)+x\frac{dp}{dx}(2px^3-1)$$

$$0 = (2x^3p-1)\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right)$$

buradan varsa tekil çözüm bulunacak

buradan genel çözüm bulunacak

- $2p + x\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow x\frac{dp}{dx} = -2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln p = -2\ln x + \ln c$

$\Rightarrow p = \frac{c}{x^2}$ olur.

$$y = p^2x^4 - px \Rightarrow y = \frac{c^2}{x^4}x^4 - \frac{c}{x^2}x \Rightarrow y = c^2 - \frac{c}{x}$$

$\Rightarrow \underline{xy = xc^2 - c}$ genel çözümdür

- $2x^3p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2x^3}$

$$y = p^2x^4 - px \Rightarrow y = \frac{1}{4x^6}x^4 - \frac{1}{2x^3}x \Rightarrow y = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{4x^2}$$

bulunur. Buradan $y = \frac{1}{4x^2}$ ve $y' = \frac{1}{2x^3}$ için

$y'^2x^4 - y - y'x = \frac{1}{4x^6}x^4 - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^3}x = 0$ olacağından $y = \frac{1}{4x^2}$ diferansiyel denklemi sağlar ve tekil çözümdür.

x e göre çözülebilen denklemler:

$F(x,y,y')=0$ denklemi x e göre çözülebilsin yani $y=p$ olmak üzere

$$x = g(y,p) \quad --- \quad (4.9)$$

biçiminde yazılabilsin. Bu durumda (4.9) un y ye göre türevi alınırsa $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ yazılırsa

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \quad -- \quad (4.10)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu p ye göre birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir ve genel çözümü $y=h(p,c)$ olsun. Bu $x=g(y,p)$ de yerine yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} x &= g(h(p,c),p) \\ y &= h(p,c) \end{aligned}\right\}$$ parametrik genel çözüm elde edilir.

Bunlar arasından p parametresi yok edilirse $f(x,y,c)=0$ genel çözümü bulunur.

Örnek: $x=\sin y'$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'=p$ dersek

$x=\sin p$ olup x e göre çözülmüş denklemdir. Her iki tarafın y ye göre türevini alırsak

$$\frac{dx}{dy}=\cos p\cdot\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1}{p}=\cos p\,\frac{dp}{dy} \Rightarrow p\cos p\,dp=dy$$

p ye göre birinci dereceden değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bunun çözümü ile

$$\int p\cos p\,dp=\int dy$$

$$p\sin p-\int \sin p\,dp=y+c$$

$$p\sin p+\cos p=y+c$$

$\Rightarrow y=p\sin p+\cos p-c$ bulunur. O halde $\left.\begin{array}{l} x=\sin p \\ y=p\sin p+\cos p-c \end{array}\right\}$

parametrik genel çözüm olur. p yok edilirse genel çözüm

$x=\sin p \quad p=\arcsin x, \quad \cos p=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-c$ bulunur.

Örnek: $y = 2xy' + y^2(y')^3$ denkleminin genel çözümünü ve varsa tekil çözümünü bulunuz.

$y' = p$ dersek $y = 2xp + y^2p^3$ dur ve $x = \frac{y}{2p} - \frac{y^2p^2}{2}$ yazılırsa x e göre çözülmüş denklemdir. y ye göre türev alınırsa

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy} - yp^2 - y^2p\frac{dp}{dy}$$

$1/p$

$$0 = -\frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy} - yp^2 - y^2p\frac{dp}{dy}$$

$$0 = -yp^2\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right) - \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right)$$

$$0 = -\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right)\left(yp^2 + \frac{1}{2p}\right)$$ olup buradan

$1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0$ ve $yp^2 + \frac{1}{2p} = 0$ bulunur.

- $1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = -\ln y + \ln c$

$\Rightarrow py = c \Rightarrow y = \frac{c}{p}$ için

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{p}{c} \\ x &= \frac{c}{2p^2} - \frac{c^2}{2} \end{aligned}\right\}$$ parametrik genel çözümü bulunur. Buradan p yok edilerek

$p = yc$ için $x = \dfrac{c}{2y^2c^2} - \dfrac{c^2}{2} \Rightarrow 2xy^2c = 1 - y^2c^3$ genel çözümü bulunur.

- $yp^2 + \dfrac{1}{2p} = 0$ için $yp^2 + \dfrac{1}{2p} = 0$ ve $x = \dfrac{y}{2p} - \dfrac{y^2p^2}{2}$ denklemleri

arasında p yok edilirse $y = -\dfrac{1}{2p^3}$ ve $x = \dfrac{-3}{8p^4} \Rightarrow \underline{27y^4 = -32x^3}$

bulunur. Bu verilen denklemi de sağladığı için tekil çözümdür.

Tanım: $y = xy' + f(y')$ $\quad (y = xp + f(p))$

biçiminde yazılabilen bir diferansiyel denkleme **Clairaut denklemi** denir. Clairaut denklemi y ye göre çözülebilir bir denklemdir. x e göre türev alınırsa

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 0 = (x + f'(p))\frac{dp}{dx}$$ dur. Buradan $\frac{dp}{dx} = 0$ ve $x + f'(p) = 0$ dır.

- $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ olup $y = xc + f(c)$ genel çözümü bulunur.

- $x + f'(p) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -f'(p) \\ y = xp + f(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{array}\right\}$ zarfın parametrik denklemi

Eğer p yok edilirse $\varphi(x,y) = 0$ şeklinde Clairaut denkleminin zarfı bulunur.

Örnek: $y = y'(x+y')$ denkleminin genel çözümünü ve bu çözüm ailesinin zarfını bulunuz.

$$y = p(x+p) \Rightarrow y = xp + p^2$$ olup Clairaut denklemidir.

Denklemin genel çözümü $p = c$ için $y = xc + c^2$ şeklindedir.

Zarfı bulmak için;

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c) &= y - xc - c^2 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} &= -x - 2c = 0 \end{aligned}\right\}$$

eşitliklerinden c yok edilirse

$c = -\frac{x}{2}$ için

$$y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2$$

$y = -\frac{x^2}{4}$ c-diskriminant eğrisidir.

$y = -\frac{x^2}{4}$ için $y' = -\frac{x}{2}$ olup $-\frac{x^2}{4} = -\frac{x}{2}\left(x - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$ şeklinde denklem sağlandığı için $y = -\frac{x^2}{4}$ tekil çözümdür.

$y = -\frac{x^2}{4}$ için $-\frac{x^2}{4} = xc + c^2 \Rightarrow 4c^2 + 4cx + x^2 = 0 \Rightarrow (2c+x)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -2c$ katlı kök (çift dereceden kök)

olduğundan $y = -\frac{x^2}{4}$ zarftır.

Örnek! $y'^3+3xy'-3y=0$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

$y'=p$ için

$p^3+3xp-3y=0 \Rightarrow y=xp+\frac{p^3}{3}$ olup Clairaut denklemidir

$p=c$ için genel çözüm

$y=cx+\frac{c^3}{3}$ olur.

Tekil çözümü bulmak için; $y=xp+\frac{p^3}{3}$ y ye göre çözülmüş denklem x e göre türev alırsak

$p=p+x\frac{dp}{dx}+p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow 0=(x+p^2)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}=0$ ve $x+p^2=0$

yazılabilir.

- $\frac{dp}{dx}=0 \rightarrow p=c \Rightarrow y=cx+\frac{c^3}{3}$ genel çözüm bulunur.

- $x+p^2=0 \Rightarrow x=-p^2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=-p^2 \\ y&=-\frac{2p^3}{3}\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x^3&=-p^6 \\ y^2&=\frac{4}{9}p^6\end{aligned}\right\} \; 9y^2+4x^3=0$

p diskriminant eğrisi tekil çözümdür.

$f(p)=\frac{p^3}{3}$ $f''(p)=2p\neq 0$ olup p-diskriminant eğrisi tekil çözümdür.

Tanım: g ve f verilen fonksiyonlar ve $y'=p$ olmak üzere

$$y = xg(p) + f(p)$$

formundaki denkleme **Lagrange diferansiyel denklemi** denir. y ye göre çözülebilir bir denklemdir. x e göre türev alınıp düzenleme yapılırsa

$$\frac{dy}{dx} = g(p) + \left(xg'(p) + f'(p)\right)\frac{dp}{dx} \quad , \quad \frac{dp}{dx} \neq 0$$

$$\left(p - g(p)\right)\frac{dx}{dp} = xg'(p) + f'(p)$$

şeklinde p bağımsız ve x bağımlı değişkenli bir lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bunun çözümü $\varphi(x,p,c)=0$ şeklindedir. O halde Lagrange denkleminin genel çözümü parametrik formda

$$\left.\begin{aligned} x &= h(p,c) \\ y &= h(p,c)g(p) + f(p) \end{aligned}\right\}$$

olarak bulunur. Buradan p yok edilirse genel çözüm kartezyen formda elde edilir.

- $p - g(p) = 0$ ise buradan tekil çözüm bulunur.

Örnek: $y = x y'^2 + y'^3$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

$y' = p$ için $y = xp^2 + p^3$ olup Lagrange denklemidir.

x e göre türev alırsak

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow p - p^2 = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$p - p^2 \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{dx}{dp} - \dfrac{2}{1-p}x = \dfrac{3p}{1-p}$ lineer denklemi elde edilir. Bunun genel çözümü

$$x = \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2}$$ olup verilen Lagrange denkleminin

genel çözümü
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2} \\ y &= \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2}p^2 + p^3 \end{aligned}\right\}$$ parametrik formda bulunur.

- $p - p^2 = 0$ ise $p(1-p) = 0 \Rightarrow p = 0$ ve $p = 1$ olup buradan

$$\left.\begin{aligned} p = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ p = 1 &\Rightarrow y = x + 1 \end{aligned}\right\}$$ tekil çözümleri bulunur.