İlkelden Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda bir veya daha çok sabit içeren bir bağıntıdan keyfi sabitlerin yok edilmesiyle bir diferansiyel denklemin nasıl elde edileceğini inceleyeceğiz.

c keyfi bir sabit (parametre) olmak üzere

$$f(x,y,c) = 0 \quad \dots (1.2)$$

şeklinde bir parametreye bağlı eğri ailesi verilmiş olsun. Bu eğri ailesinin diferansiyel denklemini elde etmek için (1.2) ifadesinin x'e göre türevini alalım:

$f(x,y,c) = 0$

$x \quad y$

$y \to x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \dots (1.3)$$

elde edilir. Eğer (1.3) ifadesinde c keyfi sabiti yoksa aranan denklem (1.3) ifadesidir. Eğer (1.3) ifadesi c keyfi sabitini içerirse (1.2) ve (1.3) bağıntıları arasında c yok edilerek

$$F(x,y,y') = 0$$

biçiminde birinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir.

c_1 ve c_2 birbirinden bağımsız iki keyfi sabit olmak üzere

$$f(x,y,c_1,c_2)=0 \quad \ldots (1.4)$$

şeklinde iki parametreye bağlı eğri ailesi verilmiş olsun. Bu eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulmak için (1.4) ifadesinin x'e göre iki kez türevini alalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'=0 \quad \ldots (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0 \quad \ldots (1.6)$$

elde edilir. (1.4), (1.5) ve (1.6) bağıntıları arasında c_1 ve c_2 keyfi sabitleri yok edilerek ikinci mertebeden

$$F(x,y,y',y'')=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eğer (1.6) denkleminde keyfi sabit yoksa aranan denklem (1.6) denklemi olur.

Benzer şekilde $c_1, c_2, ..., c_n$ birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit olmak üzere

$$f(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$$

şeklinde eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklem bu ifade ile, bu ifadenin x'e göre n kez türevinin alınması ile elde edilen ifadeler arasında $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitlerinin yok edilmesiyle

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

şeklinde n. mertebeden bir diferansiyel denklem olarak elde edilir.

➡ $c_1, c_2, ..., c_n$ gibi n tane birbirinden bağımsız keyfi sabite bağlı diferansiyel denklem n. mertebedendir.

➡ Birbirinden bağımsız keyfi sabit sayısı kadar türev alınarak denklem elde edilmeye çalışılır.

Örnek: $y = c_1 e^x + c_2$ eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklemi bulunuz.

c_1 ve c_2 şeklinde iki bağımsız sabit olduğundan x e göre iki kez türev alırsak

$$\left.\begin{aligned} y' &= c_1 e^x \\ y'' &= c_1 e^x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' = y'' \Rightarrow y'' - y' = 0$$ elde edilir.

2. mertebeden dif denk

Örnek: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

c_1, c_2, c_3 şeklinde üç bağımsız sabit olduğundan x e göre üç kez türev alırsak

$$\left.\begin{aligned} y' &= -c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y'' &= -c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y''' &= c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{aligned}\right\} \quad y' = -y''' \Rightarrow y' + y''' = 0$$ elde edilir.

3. mertebeden dif denk

Örnek: $y = c_1 e^{x+c_2}$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

c_1 ve c_2 şeklinde iki sabit var olmasına rağmen aslında bunlar lineer bağımlıdır. Yani

$$y = c_1 e^{x+c_2} = \underbrace{c_1}_{\text{sabit}} e^{x} \cdot \underbrace{e^{c_2}}_{\text{sabit}} = c e^{x} \qquad c = c_1 e^{c_2}$$

şeklinde tek sabit vardır. O halde bir kez türev alırsak

$$y = c e^{x} \Rightarrow y' = c e^{x} \Rightarrow y = y'$$ denklemi elde edilir.

Örnek: Merkezi $(1,-1)$ olan çember ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = c^2$$ $M(1,-1)$ olan çember ailesidir.

Tek sabit olduğu için bir kez türev alırsak (kapalı fonksiyon türevine göre)

$$2(x-1) + 2(y+1)\,y' = 0 \Rightarrow (x-1) + (y+1)y' = 0$$ bulunur.

Örnek! 1 yarıçaplı çember ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çemberin merkezi $M(c_1,c_2)$ olmak üzere 1 yarıçaplı çember ailesi

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$$

şeklindedir. İki keyfi sabit olduğundan iki kez türev alırsak

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)y'=0$$

$$2x+2y'y'+2(y-c_2)y''=0 \Rightarrow y-c_2=-\frac{x+(y')^2}{y''} \text{ olur}$$

$$2(x-c_1)+2\left(-\frac{x+(y')^2}{y''}\right)y'=0 \Rightarrow x-c_1=\frac{x+(y')^2}{y''}y' \text{ olur.}$$

$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$ olduğundan

$$\left(\frac{x+(y')^2}{y''}\cdot y'\right)^2+\left(-\frac{x+(y')^2}{y''}\right)^2=1$$

$$\left(x+(y')^2\right)^2\left(1+(y')^2\right)=(y'')^2$$ denklemi elde edilir.

Örnek: Genel çözümü $cxy + c^2x + 4 = 0$ olan diferansiyel denklemi bulunuz ve sınıflandırınız.

c tek keyfi parametresi olduğundan bir kez türev alırsak

$cy + cxy' + c^2 = 0$ olur. Buradan

$c(y + xy') = -c^2 \Rightarrow c = -y - xy'$, $c \neq 0$ olur.

$cxy + c^2x + 4 = 0$ da yerine yazılırsa

$xy(-y-xy') + x(-y-xy')^2 + 4 = 0$ denklemi elde edilir.

Düzenlenirse

$$\cancel{-xy^2} - x^2yy' + \cancel{xy^2} + 2x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 = 0$$

$\Rightarrow x^3(y')^2 + x^2yy' + 4 = 0$ elde edilir. ve 1. mertebe 2. derece lineer olmayan bir denklemdir.

Örnek! $y = ae^{3x} + be^{2x}$ (a, b sabitler) eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

a ve b iki keyfi sabit olduğundan iki kez türev alırsak

$$(*) \begin{cases} y' = 3ae^{3x} + 2be^{2x} \\ y'' = 9ae^{3x} + 4be^{2x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} be^{2x} &= y - ae^{3x} \\ 2be^{2x} &= y' - 3ae^{3x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y' - 3ae^{3x} &= 2(y - ae^{3x}) \\ y' - 2y &= ae^{3x} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2be^{2x} &= y' - 3ae^{3x} \\ 4be^{2x} &= y'' - 9ae^{3x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y'' - 9ae^{3x} &= 2(y' - 3ae^{3x}) \\ y'' - 2y' &= 3ae^{3x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'' - 2y' = 3(y' - 2y) \Rightarrow y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ bulunur.}$$

veya (*) sistemi a ve b bilinmeyenlerine göre yok etme metodu ile çözülüp bulunan a ve b değerleri eğri ailesinde yazılarak da denklem bulunabilir.

Örnek! $y = e^{ax+by}$ (a, b keyfi sabitler) eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

a ve b iki keyfi sabit var olduğundan iki kez türev alınacaktır. Bağımlı y değişkeni üstel fonksiyonda da var olduğundan ifade

$$\ln y = ax + by$$

şeklinde düzenlenirse türevler daha kolay alınır.

1. türev: $\dfrac{y'}{y} = a + by'$

2. türev: $\dfrac{y''\cdot y - y'y'}{y^2} = by'' \Rightarrow y''y - (y')^2 = by^2y'' \cdots (*)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - by}{x} + by' \Rightarrow \frac{y'}{y} - \frac{\ln y}{x} = b\left(y' - \frac{y}{x}\right) \Rightarrow xy' - y\ln y = b(xyy' - y^2) \cdots (**)$$

(*) ve (**) eşitlikleri oranlanırsa

$$y^2(\ln y - 1)\,y'' + y(y')^2 - x(y')^3 = 0$$

denklemi bulunur.