2. Birinci Mertebe ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $F(x,y,y')=0$ formunda yazılıyordu. Bu tip denklemlerin yalnız birinci dereceden olanlarının

$f(x,y,c)=0 \Rightarrow$ kapalı formda

veya $y=\phi(x,c) \Rightarrow$ açık formda

genel çözümlerini elde etme yöntemleri verilecektir.

Bu tip denklemler

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \text{veya} \quad \frac{dx}{dy}=h(x,y) \Rightarrow \text{türev formunda}$$

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Rightarrow \text{diferansiyel formda}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

1 Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$y' = f(x,y)$ şeklindeki diferansiyel denklem

$$h_1(x)g_1(y)dx + h_2(x)g_2(y)dy = 0$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

olarak yazılabiliyorsa böyle bir denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem denir.

Bu denklemin çözümü

$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$ yazılıp integral alınırsa

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c \Rightarrow G(y) + H(x) = c$$

olarak bulunur.

➡ Her integral için ayrı sabit almaya gerek yoktur.

Örnek: $y' = \dfrac{y-1}{1-2x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$y' = \dfrac{1}{1-2x} \cdot (y-1)$ olup $y' = h(x)\, g(y)$ şeklinde bir değişkenlerine ayrılabilen denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-2x}(y-1)$$

$$\underbrace{\frac{dy}{y-1}}_{\text{sadece } y \text{ ye bağlı}} = \underbrace{\frac{dx}{1-2x}}_{\text{sadece } x \text{ e bağlı}}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa $\displaystyle\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{1-2x}$

$\Rightarrow \ln|y-1| = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + \ln|c|$

$\circledast \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$

$\Rightarrow (y-1)\sqrt{1-2x} = c$

genel çözümü bulunur.

Örnek: $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ olup değişkenlerine ayrılabilen dif denk.tir.

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int y^{-1/2}\,dy = \int x^{-1/2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-1/2+1}}{1/2} = \frac{x^{-1/2+1}}{1/2} + c$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$$ genel çözümü bulunur.

$\sqrt{y} - \sqrt{x} = c_1$, $c_1 = \frac{c}{2}$ olarak da yazılabilir.

Örnek: $(xy^2-2y^2)\,dx + (x^2y-2x^2)\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemi düzenlersek

$y^2(x-2)\,dx + x^2(y-2)\,dy = 0$ olur. Her iki taraf $\dfrac{1}{x^2y^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{x-2}{x^2}\,dx + \frac{y-2}{y^2}\,dy = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen dif denk elde edilir.

$$\int \left(\frac{x-2}{x^2}\right)dx = \int \frac{2-y}{y^2}\,dy$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \frac{2}{x} = -\frac{2}{y} - \ln|y| + C$$

genel çözümü bulunur.

Örnek: $xe^{x^2-y^2}dx + ydy = 0$, $y(0)=0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$xe^{x^2-y^2}dx + ydy = 0$$

$$e^{y^2} / \quad xe^{x^2}e^{-y^2}dx + ydy = 0$$

$$xe^{x^2}dx + ye^{y^2}dy = 0$$

$$\int xe^{x^2}dx + \int ye^{y^2}dy = \int d(c)$$

$$\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{y^2} = c$$

$\underline{e^{x^2} + e^{y^2} = 2c}$ genel çözümdür.

$y(0)=0$ koşulu için $x=0$ için $y=0 \Rightarrow e^0 + e^0 = 2c$

$$\Rightarrow 2 = 2c$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$\Rightarrow \underline{e^{x^2} + e^{y^2} = 2}$ istenen özel çözüm

Örnek! $y' \sin y = \sin^2 x$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} \sin y = \sin^2 x$$

$$\sin y \, dy = \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$-\cos y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\sin 2x - 4\cos y = 2x + c$$ genel çözümdür.

$$\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Örnek! $y' + 2xy = -xy^2$ denklemini çözünüz

$$\frac{dy}{dx} = -x(y^2+2y)$$

$$\frac{dy}{y^2+2y} = -x\,dx$$ değişkenlerine ayrılabilen denklem

$$\int \frac{dy}{y^2+2y} = \int -x\,dx$$

$$\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+2}\right) dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = -x^2 + c$$

$$\underbrace{y = c(y+2)e^{-x^2}}_{\text{genel çözüm}}$$