② Homojen Diferansiyel Denklemler

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunda x yerine xt, y yerine yt konulduğunda

$$f(xt, yt) = t^n f(x,t) \quad , \quad n \in \mathbb{R}$$

oluyorsa fonksiyona **n. dereceden homojendir** denir.

Not: f, $\frac{y}{x}$ in veya $\frac{x}{y}$ nin bir fonksiyonu ise $f\left(\frac{yt}{xt}\right) = t^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$

veya $f\left(\frac{xt}{yt}\right) = t^0 f\left(\frac{x}{t}\right)$ olacağından fonksiyon **sıfırıncı dereceden homojendir.**

Örnek: $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ için

$$f(xt,yt) = \sqrt{(xt)^3+(yt)^3} = \sqrt{t^3(x^3+y^3)} = t^{3/2}\sqrt{x^3+y^3} = t^{3/2} f(x,y)$$

$\Rightarrow$ fonksiyon $3/2$. dereceden homojendir.

Örnek! $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} + \tan\frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right)$ için

$$f(xt, yt) = \frac{(xt)^2}{(yt)^2} + \tan\frac{xt}{yt} + \ln\left(\frac{2xt}{yt} + 1\right)$$

$$= \frac{x^2}{y^2} + \tan\frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right)$$

$$= f(x,y)$$

$\Rightarrow$ fonksiyon sıfırıncı dereceden homojendir.

Not: Homojen fonksiyonlarda her terimin toplam derecesi aynı olmalıdır.

- $f(x,y) = \underbrace{6xy^3}_{\text{derece } 4} - \underbrace{x^2y^2}_{\text{derece } 4}$ $\Rightarrow$ fonksiyon 4. dereceden homojen

Gerçekten

$$
\begin{aligned}
f(xt,yt) &= 6(xt)(yt)^3 - (xt)^2(yt)^2 \\
&= 6xy^3t^4 - x^2y^2t^4 \\
&= t^4\{6xy^3 - x^2y^2\} \\
&= t^4 f(x,y)
\end{aligned}
$$

- $f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\text{derece } 2} - \underbrace{y}_{\text{derece } 1}$ $\Rightarrow$ dereceleri farklı olduğundan homojen değildir.

Tanım: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarının her ikisi de aynı dereceden homojen ise veya

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

denklemi için $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen ise diferansiyel denkleme homojendir denir.

Örnek: $(\underbrace{x^2}_{2} - 3\underbrace{y^2}_{2})\,dx + 2\underbrace{xy}_{1+1}\,dy = 0$

$\underbrace{x^2 - 3y^2}_{2.\text{derece}}$ $\qquad$ $\underbrace{xy}_{2.\text{derece}}$

aynı dereceden olduğu için denklem homojendir.

veya

$(x^2-3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

$$f(x,y) = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$$ olmak üzere

$$f(xt,yt) = \frac{3(yt)^2-(xt)^2}{2xtyt} = \frac{\cancel{t^2}(3y^2-x^2)}{\cancel{t^2}(2xy)}$$

$$= \frac{3y^2-x^2}{2xy} = f(x,y)$$

olup $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen olacağından denklem homojen denklemdir

Teorem: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ denklemi homojen ise $y = ux$ veya $x = uy$ değişken değişimi ile değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denkleme dönüşür. Burada u ve v yeni bağımlı değişkenlerdir. ($u = u(x)$, $v = v(x)$ şeklinde)

İspat: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ homojen ise $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ formunda veya $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right)$ formunda yazılabilir.

$y = ux$ için $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ olup denklemde yazılırsa

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{u - g(u)}$$

değişkenlerine ayrılabilen denklem elde edilir.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u-g(u)}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = F(u) + C$$

şeklinde olup $u = \frac{y}{x}$ yazılırsa genel çözüm

$$\ln|x| = F\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $x = vy$ değişken dönüşümü ile de denklemin değişkenlere ayrılabilir denkleme indirgendiği gösterilir.

➡ Denklemdeki $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları

$\frac{y}{x}$ ye bağlı ise $y = ux$

$\frac{x}{y}$ ye bağlı ise $x = vy$

dönüşümü yapmak daha uygundur.

Örnek! $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$y' = \frac{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$ olup $\frac{y}{x}$ formunda

olduğundan denklem homojendir.

$\underline{y = ux}$ dersek $\underline{y' = u'x + u}$ olur.

$$u'x + u = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow u'x = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \frac{dx}{x}$$ değişkenlerine ayrılabilir denk

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2(1+u)}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2| = \ln|x| + \ln c$$

$$(1-2u-u^2)^{-1/2} = cx$$

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yazılırsa

$\left(1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/2} = cx$ genel çözümdür.

Örnek! $\underbrace{xy}_{2.\text{derece}}dx - (\underbrace{x^2+y^2}_{2.\text{ derece}})dy = 0$ denklemini çözünüz.

dx ve dy nin katsayıları aynı dereceden olduğundan denklem homojendir veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ olup homojendir

$y = ux$ dersek $y' = u'x + u$ dur.

$$u'x + u = \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow u'x = \frac{u}{1+u^2} - u$$

$$\Rightarrow u'x = -\frac{u^3}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u^2}{u^3}du = -\frac{dx}{x}$$ değişkenlerine ayrılabilen denklem

$$\int \frac{1+u^2}{u^3}\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u}\right) du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} + \ln|u| = -\ln|x| + c$$

$$\ln|ux| = \frac{1}{2u^2} + c$$

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yerine yazılırsa

$$\ln\left|\frac{y}{x}x\right| = \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} + c$$

$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$ genel çözümü bulunur.

Örnek! $(1+2e^{x/y})\,dx + 2e^{x/y}(1-xy^{-1})\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Denklem $\frac{x}{y}$ formunda olduğundan $x = vy$ dönüşümü yapalım.

$x = vy \Rightarrow \quad x' = v'y + v$ olur. (x bağımlı, y bağımsız $x = x(y)$ şeklinde)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(xy^{-1}-1)\,2e^{x/y}}{1+2e^{x/y}}$$

$$v'y + v = \frac{(v-1)\,2e^{v}}{1+2e^{v}}$$

$$v'y = -\frac{v+2e^{v}}{1+2e^{v}}$$

$$\frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}\,dv = -\frac{dy}{y}$$ değişkenlerine ayrılabilir denklem

$$\int \frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}\,dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|v+2e^{v}| = -\ln|y| + \ln c$$

$y(v+2e^{v}) = c$ dur.

$x = vy \Rightarrow v = \frac{x}{y}$ yazılırsa

$y\left(\frac{x}{y} + 2e^{\frac{x}{y}}\right) = c$ genel çözümü bulunur.