## ③ Değişkenlerine Ayrılabilen veya Homojen Hale İndirgenebilen Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \text{ sabit}$$

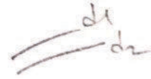
formundaki denklemler $c_1=c_2=0$ ise homojendir. Eğer bu sabitlerden en az biri sıfırdan farklı ise homojenlik bozulur ve denklem uygun dönüşümlerle homojen denkleme ya da değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir.

---

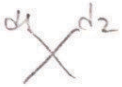
$d_1 \ldots a_1x+b_1y+c_1=0$ , $d_2 \ldots a_2x+b_2y+c_2=0$

i) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\lambda$ ise $d_1$ ile $d_2$ çakışık doğrular


ii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ise $d_1$ ile $d_2$ paralel doğrular




iii) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ise $d_1$ ile $d_2$ bir noktada kesişir.



(i) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ ise

$a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, $c_1 = \lambda c_2$ olup

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f(\lambda)$$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(\lambda)$ dur. Bu denklemin de çözümü

$y = f(\lambda)x + c$ şeklindedir.

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ise (veya $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ ise)

$a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ olup $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ dur.

$u = a_2x + b_2y$ dönüşümü yapılırsa $u' = a_2 + b_2y' \Rightarrow y' = \dfrac{u' - a_2}{b_2}$

elde edilir.

$$\frac{du}{b_2 f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) + a_2} = dx$$ değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir.

Böylece denklem

$$\frac{u'-a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) \Rightarrow \frac{du}{b_2 f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) + a_2} = dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir. İntegral alınıp $u$ yerine $u = a_2 x + b_2 y$ yazılırsa denklemin genel çözümü bulunur.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise (veya $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ ise)

$(h, k)$ değerleri $\left.\begin{array}{l} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin

çözümü olmak üzere $\left.\begin{array}{l} x = u + h \\ y = v + k \end{array}\right\}$ dönüşümü uygulanırsa $dx = du$, $dy = dv$

için $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ olup denklem $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$ şeklinde

$u$ ve $v$ ye bağlı homojen denkleme indirgenir. Bu homojen denklemin çözümü için de

$$v = tu$$

dönüşümü yapılarak denklem değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenip integral alınarak çözüm bulunur. Bulunan çözümde

$$t = \frac{v}{u}, \quad u = x-h, \quad v = y-k$$

ifadeleri yerine yazılarak denklemin genel çözümü bulunmuş dur.

Örnek: $y' = \dfrac{y+1}{x} + 2$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$y' = \dfrac{2x+y+1}{x}$ şeklinde olup değişkenlerine ayrılabilir veya homojen denklem değildir.

$a_1 = 2 \quad b_1 = 1 \quad c_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1, \ b_2 = 0, \ c_2 = 0$ olup

$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 2.0 - 1.1 = -1 \neq 0$ olduğu için $\left.\begin{array}{l} x = u+h \\ y = v+k \end{array}\right\}$

dönüşümü ile denklem homojen denkleme indirgenebilir. $(h,k)$ değerleri $\left.\begin{array}{l} 2h+k+1=0 \\ h=0 \end{array}\right\}$ sisteminin çözümleri olduğu için önce

bunları bulalım. $h=0$ için $k=-1$ olup $(h,k) = (0,-1)$ olur.

O halde

$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = v-1 \end{array}\right\}$ dönüşümü yaparsak $\begin{array}{l} dx = du \\ dy = dv \end{array} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$ olur.

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v - 1 + 1}{u}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u+v}{u}$$ homojen denklemi elde edilir

$v = tu$ dönüşümü yaparsak $v' = t'u + t$ olup

$$t'u + t = \frac{\overset{\cancel{u}(2+t)}{2u + tu}}{\cancel{u}}$$

$$t'u + t = 2 + t$$

$$t'u = 2$$

$$\frac{dt}{du} u = 2 \Rightarrow dt = 2\frac{du}{u} \Rightarrow t = 2\ln|u| + c$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u} = 2\ln|u| + c$$

$x = u$, $y = v - 1$ $\Rightarrow$ $u = x$, $v = y + 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y+1}{x} = 2\ln|x| + c}_{\text{genel çözüm}}$$

Örnek: $(x-y+1)\,dx-(2x-2y+1)\,dy=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Değişkenlerine ayrılabilen veya homojen denklem değildir.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{2x-2y+1} \qquad \begin{array}{lll} a_1=1 & b_1=-1 & c_1=1 \\ a_2=2 & b_2=-2 & c_2=1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow a_1b_2-b_1a_2=-2-(-2)=0$$

olduğundan ortak olan ifadeye $u$ demeliyiz

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overbrace{x-y}+1}{2\underbrace{(x-y)}+1}$$ olduğundan $u=x-y$ dönüşümü yapalım

$u=x-y \Rightarrow \quad u'=1-y' \Rightarrow \quad y'=1-u'$ olur.

$$1-u'=\frac{u+1}{2u+1} \Rightarrow u'=1-\frac{u+1}{2u+1} \Rightarrow u'=\frac{u}{2u+1}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u}{2u+1} \Rightarrow \frac{2u+1}{u}\,du=dx$$

değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int \frac{2u+1}{u}\,du = \int dx$$

$$\int \left(2+\frac{1}{u}\right) du = \int dx$$

$$2u + \ln|u| = x + c$$ bulunur.

$u = x-y$ olduğundan yerine yazılırsa

$$2(x-y) + \ln|x-y| = x + c$$ genel çözümü elde edilir.

Genel çözüm

$$\ln|x-y| = 2y - x + c_1 \Rightarrow x-y = e^{2y-x+c_1}, \quad e^{c_1} = c$$

$$\Rightarrow x-y = c\,e^{2y-x}$$

şeklinde de yazılabilir.

örnek: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+y+1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$a_1=0, b_1=0, c_1=1$ ; $a_2=1, b_2=1, c_2=1$ olup $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ olduğundan uygun bir ifadeye $u$ demeliyiz.

$u = a_2x + b_2y \Rightarrow u = x+y$ dönüşümü yapalım.

$u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$

$$u' - 1 = \frac{1}{u+1} \Rightarrow u' = \frac{1}{u+1} + 1 \Rightarrow u' = \frac{u+2}{u+1}$$

$\Rightarrow \dfrac{u+1}{u+2}\, du = dx$ değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir

$$\Rightarrow \int \left(\frac{u+1}{u+2}\right) du = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u+2}\right) du = \int dx$$



$$\Rightarrow u - \ln|u+2| = x + c$$

$u = x+y$ için $\Rightarrow y - \ln|x+y+2| = c \Rightarrow x+y+2 = c e^{y}$ genel çözüm 65.

Örnek: $y' = \tan^2(x+y)$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$u = x+y$ dönüşümü yaparsak $u' = 1+y' \Rightarrow y' = u'-1$ dur.

$$u'-1 = \tan^2 u$$
$$u' = 1+\tan^2 u$$
$$u' = \sec^2 u$$
$$\frac{du}{\sec^2 u} = dx$$

$\cos^2 u \, du = dx$ değişkenlerine ayrılabilir denk.

$$\int \cos^2 u \, du = \int dx$$
$$\int \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right) du = \int dx$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u = x + c \Rightarrow 2u + \sin 2u = 4x + c$$

$u = x+y$ için $2(x+y) + \sin 2(x+y) = 4x + c$

$\Rightarrow 2y - 2x + \sin 2(x+y) = c$

genel çözüm

**Örnek:** $(2x+3y)dx + (y+2)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-3y}{y+2} \qquad \left.\begin{aligned} a_1=-2,\ b_1=-3,\ c_1=0 \\ a_2=0,\ b_2=1,\ c_2=2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_1b_2-b_1a_2 = -2 \neq 0 \\ \text{dır.} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -2h-3k=0 \\ k+2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h=3 \\ k=-2 \end{aligned} \text{ olup} \qquad \left.\begin{aligned} x=u+3 \\ y=v-2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \text{dönüşümü} \\ \text{yaparsak} \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ olacağından verilen denklem

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2(u+3)-3(v-2)}{v-2+2}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-2u-3v}{v} \quad \text{homojen denklemine indirgenir.}$$

$v = ut$ dönüşümü yaparsak ($t = t(u)$ şeklindedir) $v' = t'u + t$

olup

$$t'u+t = \frac{-2\cancel{u}-3\cancel{u}t}{\cancel{u}t} \Rightarrow t'u+t = \frac{-2-3t}{t} \Rightarrow t'u = \frac{-2-3t-t^2}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2+3t+t^2}\,dt = -\frac{du}{u} \quad \text{değişkenlerine ayrılabilir denkleme indirgenir.}$$

$$\int \frac{t}{t^2+3t+2}\,dt = -\int \frac{du}{u}$$

$$\int \left( \frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) dt = -\int \frac{du}{u}$$

$$2\ln|t+2| - \ln|t+1| = -\ln|u| + \ln|c|$$

$$\ln \frac{(t+2)^2}{t+1} + \ln|u| = \ln|c|$$

$$u\,\frac{(t+2)^2}{t+1} = c$$

$$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1}$$

$$\qquad\qquad (t+1) \qquad (t+2)$$

$$t = A(t+1) + B(t+2)$$

$t=-1$ için $-1 = B \Rightarrow B=-1$

$t=-2$ için $-2 = -A \Rightarrow A = 2$

$$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1}$$ olur. //

$t = \frac{v}{u}$ ve $u = x-3$, $v = y+2$ yazılırsa

$$(x-3)\left( \frac{\left(\frac{y+2}{x-3}+2\right)^2}{\frac{y+2}{x-3}+1} \right) = c \Rightarrow \underbrace{(2x+y-4)^2 = c(x+y-1)}$$

genel çözümü bulunur.