4 Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım: u, bir D bölgesinde birinci kısmi türevleri sürekli, iki reel değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $\forall (x,y) \in D$ için

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

ifadesine $u = u(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli denir.

Örnek: $u = x^2 + 8x^2y - 10y^3$ fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$du = (2x + 16xy)\,dx + (8x^2 - 30y^2)\,dy$$

dır.

Not: $f(x,y) = c$ eğriler ailesinin tam diferansiyeli

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$$

bu aynı zamanda eğri ailesinin diferansiyel denklemidir.

Tanım: Eğer $\forall (x,y) \in D$ için

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad ---(2.1)$$

ifadesi $du(x,y)$ tam diferansiyeline eşit olacak şekilde iki reel değişkenli bir u fonksiyonu varsa bu ifadeye D bölgesinde bir tam diferansiyel denir. Yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu varsa (2.1) ifadesi bir tam diferansiyeldir. Eğer

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

denkleminin sol tarafı bir tam diferansiyel ise denkleme **tam diferansiyel denklem** denir.

Örnek: • $(2x+16xy)\,dx + (8x^2-30y^2)\,dy = 0$ tam diferansiyel denklemdir, çünkü $du = d(x^2+8x^2y-10y^3) = (2x+16xy)\,dx + (8x^2-30y^2)\,dy$ dir.

• $y\,dx + 2x\,dy = 0$ tam diferansiyel denklem değildir, çünkü $y\,dx + 2x\,dy$ hiçbir fonksiyonun tam diferansiyeli değildir.

Teorem: M ve N, dikdörtgensel bir D bölgesinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \text{--- (2.2)}$$

diferansiyel denkleminin D de tam olması için gerek ve yeter koşul her $(x,y) \in D$ için

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \left(M_y = N_x \right) \quad \text{--- (2.3)}$$

olmasıdır.

İspat: Önce (2.2) denkleminin tam olduğunu varsayalım. Bu takdirde $Mdx+Ndy$ D de tam diferansiyeldir. Yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu vardır. Buradan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

yazılabilir. M ve N nin birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan u'nun ikinci mertebeden kısmi türevleri de süreklidir ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{olup} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

elde edilir. Bu teoremin birinci kısmını ispat eder.

Şimdi her $(x,y) \in D$ için (2.3) koşulunun sağlandığını varsayalım. (2.2) denkleminin D de tam olduğunu ispat etmek için

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{---} (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \text{---} (2.5)$$

eşitliklerini sağlayan bir u fonksiyonunun varlığını göstermek gerekir. Bunun için (2.4) ifadesinin x e göre kısmi integralini, yani y yi sabit tutup x e göre integralini alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y) \quad \text{---} (2.6)$$

elde edilir. Burada h(y) integrasyon sabitidir ve bunu belirlemek için (2.6) nın y ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{dh}{dy}$$

olur. Buradan $\dfrac{dh}{dy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ yazılabilir. (2.5)

kullanılırsa

$$\frac{dh}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \quad \ldots (2.7)$$

elde edilir. (2.7) nin ikinci tarafı x e bağlı değildir. Gerçekten (2.3) dikkate alınarak

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

olduğu görülür. Böylece (2.7) den integral alınarak

$$h(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right) dy + c_1$$

bulunur ve bu değer (2.6) da yerine yazılırsa,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right) dy + c_1$$

elde edilir. Bu teoremin ikinci kısmını ispat eder.

Not: u fonksiyonunun elde edilmesi için (2.5) denkleminden de başlayabiliriz. Bu durumda önce y ye göre kısmi integral alınır ve

$$u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x)$$

elde edilir. Sonra x e göre türev alınır

$$h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\,dy$$

elde edilir. Bu ifade y den bağımsız olduğundan x e göre integral alınarak $h(x)$ bulunur ve $u(x,y)$ de yerine yazılır.

Teorem: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel olsun. Yani $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ eşitliklerini sağlayan bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Bu durumda denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = c \quad , \; c \text{ keyfi sabit}$$

şeklindedir.

İspat: Denklem tam diferansiyel olduğundan

$$\begin{aligned} du(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= M(x,y)dx + N(x,y)dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow du(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = c$$

elde edilir.

Örnek: $(2x+16xy)dx + (8x^2-30y^2)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 2x+16xy \\ N(x,y) = 8x^2-30y^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} M_y = 16x \\ N_x = 16x \end{array}\right\} \quad M_y = N_x \text{ olduğundan}$$

verilen denklem tam diferansiyeldir. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+16xy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2-30y^2$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. $u(x,y) = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+16xy \quad \text{eşitliğini kullanırsak}$$

$$u(x,y) = \int (2x+16xy)dx + h(y) = x^2 + 8x^2y + h(y)$$

bulunur. Şimdi bunun y ye göre türevini alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2 + h'(y)$$

olur. $\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{8x^2} - 30y^2 = \cancel{8x^2} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = -30y^2$

$$\Rightarrow h(y) = -10y^3 + c_1$$

bulunur.

O halde $u(x,y) = x^2 + 8x^2y - 10y^3 + c_1$ olur. Genel çözüm

$$u(x,y) = c_2$$

olduğundan istenen genel çözüm

$$x^2 + 8x^2y - 10y^3 + c_1 = c_2 \qquad (c_2 - c_1 = c)$$

$$x^2 + 8x^2y - 10y^3 = c$$

olarak elde edilir.

İki sabitin farkı yine bir sabit olacağından h fonksiyonu bulunurken integral sabiti alınmayabilir.

Eğer $\frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2 - 30y^2$ eşitliği ile başlarsak buradan

$$u(x,y) = \int (8x^2 - 30y^2)\,dy + h(x) = 8x^2y - 10y^3 + h(x)$$

olur. Şimdi bunun x e göre türevini alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 16\cancel{xy} + h'(x) = 2x + 16\cancel{xy} \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = \int 2x\,dx = x^2 \quad \text{bulunur.}$$

$$u(x,y) = 8x^2y - 10y^3 + h(x) = 8x^2y - 10y^3 + x^2 \quad \text{olup}$$

genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$$8x^2y - 10y^3 + x^2 = c$$

çözümü elde edilir.

➡ $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ eşitliklerinin kullanım sırasının önemi yoktur. Hangisinden başlanırsa başlanılsın sonuçta aynı $u(x,y) = c$ genel çözümü bulunur.

Örnek: $(e^x+y)dx+(\cos y+x+1)dy=0$, $y(0)=0$ probleminin çözümünü bulunuz.

Denklem şu ana kadar gördüğümüz denklem tiplerinden değildir. Tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edersek;

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= e^x+y \\ N(x,y) &= \cos y+x+1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_y &= 1 \\ N_x &= 1 \end{aligned}\right\} \quad M_y = N_x \text{ olduğundan}$$

denklem tam diferansiyeldir. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x+y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y+x+1$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır bunu bulalım;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x+y \Rightarrow u(x,y) = \int (e^x+y)\,dx + h(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^x+yx+h(y) \quad \text{olur. Buradan}$$

y ye göre türev alıp $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y+x+1$ eşitliğini kullanırsak

$$\cancel{x}+h'(y) = \cos y+\cancel{x}+1 \Rightarrow h'(y) = \cos y+1$$

$$\Rightarrow h(y) = \int(\cos y+1)\,dy$$

$$\Rightarrow h(y) = \sin y+y$$

bulunur.

O halde genel çözüm $u(x,y)=c$ olduğundan

$$e^x+yx+\sin y+y=c$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

$y(0)=0$ koşulunu sağlayan çözüm

$e^0+0.0+\sin 0+0=c \Rightarrow c=1$ olup

$$e^x+yx+\sin y+y=1$$

istenen özel çözümdür.

Not: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tam diferansiyel denklemin $y(x_0)=y_0$ koşulunu sağlayan çözümü

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y} N(x_0,z)dz=0$$

veya

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y} N(x,z)dz=0$$

eşitliği ile de bulunabilir.

$(e^x+y)\,dx + (\cos y + x + 1)\,dy = 0$, $y(0)=0$ probleminin çözümü

$e^y + xy + \sin y + y = 1$ olarak bulunmuştu. Gerçekten $x_0=0$, $y_0=0$ için

$N(x_0,z) = N(0,z) = \cos z + 1$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_0^x (e^t+y)\,dt + \int_0^y (\cos z+1)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow (e^t + yt)\Big|_0^x + (\sin z + z)\Big|_0^y = 0$$

$$\Rightarrow e^x + xy - 1 + \sin y + y = 0$$

$$\Rightarrow e^x + xy + \sin y + y = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Diğer eşitlik kullanılsaydı $M(t,y_0) = M(t,0) = e^t$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x,z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_0^x e^t\,dt + \int_0^y (\cos z + x + 1)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow e^t\Big|_0^x + (\sin z + xz + z)\Big|_0^y = 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 + \sin y + xy + y = 0$$

$$\Rightarrow e^x + xy + \sin y + y = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Not: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tam diferansiyel denklem ise denklemin terimleri belli tam diferansiyellerin toplamı olacak şekilde gruplara ayrılıp integre edilerek genel çözüm bulunabilir. Yani

$$du_1(x,y) + du_2(x,y) + \cdots + du_n(x,y) = 0$$

yazılıp buradan integral alınırsa çözüm

$$u_1(x,y) + u_2(x,y) + \cdots + u_n(x,y) = 0$$

olarak kolaylıkla bulunur.

Sıklıkla Karşılaşılan Diferansiyeller

- $d(x+y) = dx + dy$
- $d(x-y) = dx - dy$
- $d(x^2+y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy$
- $d(xy) = y\,dx + x\,dy$
- $d(y/x) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$
- $d(x/y) = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
- $d(\ln(x+y)) = \dfrac{dx+dy}{x+y}$
- $d(\ln(x-y)) = \dfrac{dx-dy}{x-y}$
- $d(\ln(xy)) = \dfrac{y\,dx + x\,dy}{xy}$
- $d(\sqrt{x^2+y^2}) = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $d(\arctan \frac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

Örnek: $(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$ tam diferansiyel denklemi için

$$(3x^2y\,dx + x^3dy) + (2xy\,dx + x^2dy) + 2y\,dy = 0$$

$$d(x^3y) + d(x^2y) + d(y^2) = d(c)$$

$$\int d(x^3y) + \int d(x^2y) + \int d(y^2) = \int d(c)$$

$$x^3y + x^2y + y^2 = c$$

genel çözümü bulunur.

Örnek! $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$, $y(2) = 1$ probleminin çözümünü bulunuz

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(c)$$

$\frac{x}{y} = c \Rightarrow x = cy$ genel çözümdür.

$y(2) = 1$ için $2 = c.1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow x = 2y$ istenen özel çözümdür.

Örnek: $M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + x^{-1})dy = 0$ denkleminin tam olabilmesi için $M(x,y)$ ne olmalıdır?

Denklem tam diferansiyel ise $M_y = N_x$ olmalıdır.

$N_x = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$ için

$M_y = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow M(x,y) = \int \left(e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}\right) dy + g(x)$

$\Rightarrow M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$ olmalıdır.