⑤ Tam Diferansiyel Denklem Haline Getirilebilen Denklemler – İntegrasyon Çarpanları

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemi için $M_y \neq N_x$ ise denklem tam değildir. Böyle denklemleri çözmek için tam hale getirme yöntemlerini vereceğiz.

Tanım: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemi tam değilse, fakat bu denklemin uygun bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu ile çarpılmasıyla elde edilen

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

diferansiyel denklemi tam ise $\mu(x,y)$ fonksiyonuna verilen diferansiyel denklemin **integral (integrasyon) çarpanı** denir.

Örnek: $(3y+4xy^2)dx + (2x+3x^2y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 3y+4xy^2 \\ N(x,y) &= 2x+3x^2y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_y &= 3+8xy \\ N_x &= 2+6xy \end{aligned}\right\} \quad M_y \neq N_x$$

olduğundan denklem tam diferansiyel değildir.

Bu denklemin herbir terimi $\mu(x,y) = x^2y$ ile çarpılırsa

$(3x^2y^2 + 4x^3y^3)dx + (2x^3y + 3x^4y^2)dy = 0$ olup buradan

$$\left.\begin{aligned} M_1(x,y) &= 3x^2y^2+4x^3y^3 \\ N_1(x,y) &= 2x^3y+3x^4y^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} (M_1)_y &= 6x^2y+12x^3y^2 \\ (N_1)_x &= 6x^2y+12x^3y^2 \end{aligned}\right\} \quad (M_1)_y = (N_1)_x$$

olduğundan yeni denklem tamdır ve $\mu(x,y) = x^2y$ verilen denklemin bir integral çarpanıdır.

İntegral Çarpanının Bulunması

$\lambda = \lambda(x,y)$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{--- (2.8)}$$

denkleminin bir integral çarpanı olsun. Bu takdirde

$$\lambda M(x,y)dx + \lambda N(x,y)dy = 0$$

denklemi tam diferansiyel olacağından

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda M) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda N)$$

eşitliği sağlanır. Buradan da

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} M + \lambda \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{=M_y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} N + \lambda \underbrace{\frac{\partial N}{\partial x}}_{=N_x}$$

$$\lambda(M_y - N_x) = N\frac{\partial \lambda}{\partial x} - M\frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \text{---- (2.9)}$$

şeklinde λ bilinmeyenine göre bir kısmi diferansiyel denklem elde edilir. (2.9) denklemini çözmek zor olduğu için λ nın bazı halleri için bu kısmi diferansiyel denklemi bir adi diferansiyel denkleme indirgenebilir ve λ kolayca bulunabilir.

ⓘ λ, yalnız x in bir fonksiyonu olsun. Yani $\lambda = \lambda(x)$ olsun.
Bu durumda $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx}$ ve $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$ olup (2.9) denklemi

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\lambda \quad \text{---} \quad (2.10)$$

biçiminde yazılabilir. λ yalnız x in fonksiyonu olduğundan $\frac{M_y - N_x}{N}$ de yalnız x in fonksiyonudur. Bu durumda (2.10) adi diferansiyel denkleme indirgenir.

Böylece görülür ki

$$\frac{M_y - N_x}{N} \quad \text{---} \quad (2.11)$$

fonksiyonu yalnız x in fonksiyonu ise (2.8) denkleminin yalnız x in bir fonksiyonu olan bir integral çarpanı vardır. Bu integral çarpanı (2.10) denkleminin çözülmesiyle bulunur.

(2.10) denklemi

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{M_y - N_x}{N}\,dx$$

şeklinde yazılırsa değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olur. Buradan integral alınırsa λ integral çarpanı

$$\ln(\lambda(x)) = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx \implies \lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}$$

şeklinde bulunur.

→ $\frac{M_y - N_x}{N}$ sadece x e bağlı ise $\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}$ dır.

Örnek: $(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$ denkleminin bir integral çarpanını bulunuz

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^2+y^2+x \\ N(x,y) = xy \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} M_y = 2y \\ N_x = y \end{array}\right\}$$ $M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam diferansiyel değildir.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x}$$ sadece x e bağlı olduğu için

integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

olarak bulunur.

ii) λ, yalnız y nin bir fonksiyonu olsun. Yani $\lambda=\lambda(y)$ olsun.

Bu durumda $\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\dfrac{d\lambda}{dy}$ ve $\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}=0$ olup (2.9) denklemi

$$\frac{d\lambda}{dy}=\frac{M_y-N_x}{-M}\lambda \quad --- \quad (2.12)$$

denklemine indirgenir. Eğer

$$\frac{M_y-N_x}{-M} \quad --- \quad (2.13)$$

fonksiyonu yalnız y nin fonksiyonu ise (2.8) denkleminin yalnız y nin fonksiyonu olan bir integral çarpanı vardır ve bu integral çarpanı

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{M_y-N_x}{-M}dy$$

$$\Rightarrow \ln(\lambda(y))=\int\frac{M_y-N_x}{-M}dy \Rightarrow \lambda(y)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{-M}dy}$$ şeklindedir.

$\dfrac{M_y-N_x}{M}$ sadece y ye bağlı ise $\lambda(y)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{-M}dy}$ dir.

Örnek: $6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dx = 0$ denkleminin bir integral çarpanını bulunu

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 6xy \\ N(x,y) = 4y + 9x^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} M_y = 6x \\ N_x = 18x \end{array}\right\}$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam değildir.

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{6x - 18x}{-6xy} = \frac{2}{y}$$

sadece y ye bağlı olduğu için

Integral çarpanı

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y} = y^2$$

olarak bulunur.

Örnek: $y' = \dfrac{x^2+y^2-x}{y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem değişkenlerine ayrılabilir veya homojen değildir. Denklem

$y\,dy = (x^2+y^2-x)\,dx \Rightarrow (x-x^2-y^2)\,dx + y\,dy = 0$ yazılabilir.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= x-x^2-y^2 \\ N(x,y) &= y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_y &= -2y \\ N_x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam diferansiyel değildir.

integral çarpanı arayalım.

$\dfrac{M_y-N_x}{N} \rightarrow$ sadece x e bağlı $\qquad \dfrac{M_y-N_x}{-M} \rightarrow$ sadece y ye bağlı

- $\dfrac{M_y-N_x}{-M} = \dfrac{-2y-0}{-x+x^2+y^2}$ sadece y ye bağlı değildir.

- $\dfrac{M_y-N_x}{N} = \dfrac{-2y-0}{y} = -2 = -2x^0$ sadece x e bağlıdır

$\Rightarrow$ Sabiti hem x e bağlı hem y ye bağlı olarak düşünebiliriz

$\dfrac{M_y - N_x}{N} = -2$ sadece x e bağlı olduğundan integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}$$ olur.

Denklem $\lambda(x) = e^{-2x}$ ile çarpılırsa

$$\left(x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x}\right) dx + y e^{-2x} dy = 0$$ için

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x} \\ Q(x,y) = y e^{-2x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} P_y = -2y e^{-2x} \\ Q_x = -2y e^{-2x} \end{array}\right\} P_y = Q_x$$

olup denklem tamdır. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = y e^{-2x}$$

olacak şekilde $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır bunu bulalım:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y e^{-2x}$$ kullanılırsa

$$u(x,y) = \int y e^{-2x} dy + h(x) = \frac{y^2}{2} e^{-2x} + h(x)$$ olur.

Buradan x e göre türev alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y^2 e^{-2x} + h'(x)$$

olur. $\frac{\partial u}{\partial x} = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x}$ eşitliği de kullanılırsa

$$x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} \cancel{- y^2 e^{-2x}} = \cancel{-y^2 e^{-2x}} + h'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x}$$

$$\Rightarrow h(x) = \int x e^{-2x} dx - \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow h(x) = \cancel{\int x e^{-2x} dx} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} \cancel{- \int x e^{-2x} dx}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2} e^{-2x}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-2x} dx}_{dv} = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx$$

bulunup genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan aranan çözüm

$$\frac{y^2}{2} e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c e^{2x}$$

olarak bulunur.

Örnek: $y' = \dfrac{y}{y^2+x-1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$(y^2+x-1)\,dy - y\,dx = 0$ olup

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= -y \\ N(x,y) &= y^2+x-1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_y &= -1 \\ N_x &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam değildir.

$\dfrac{M_y-N_x}{N} \to$ sadece x e bağlı, $\dfrac{M_y-N_x}{-M} \to$ sadece y ye bağlı olmalı

- $\dfrac{M_y-N_x}{N} = \dfrac{-1-1}{y^2+x-1} = \dfrac{-2}{y^2+x-1}$ sadece x'e bağlı değil
- $\dfrac{M_y-N_x}{-M} = \dfrac{-1-1}{-(-y)} = \dfrac{-2}{y}$ sadece y'ye bağlıdır. O halde

integral çarpanı $\lambda(y) = e^{\int \frac{M_y-N_x}{-M}\,dy} = e^{\int \frac{-2}{y}\,dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}$ olur.

Denklem $\lambda(y) = \dfrac{1}{y^2}$ ile çarpılırsa $\left(1+\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)dy - \dfrac{1}{y}\,dx = 0$

tam diferansiyel denklemi elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2}$$ olacak şekilde bir

$u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow u(x,y) = \int -\frac{1}{y}\,dx + h(y) = \frac{-x}{y} + h(y)$$

Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{\frac{x}{y^2}} + h'(y) = 1 + \cancel{\frac{x}{y^2}} - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 1 - \frac{1}{y^2} \Rightarrow h(y) = \int \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$\Rightarrow h(y) = y + \frac{1}{y}$$ bulunur.

$u(x,y) = -\frac{x}{y} + y + \frac{1}{y}$ olup genel çözüm

$-\frac{x}{y} + y + \frac{1}{y} = c$ veya $\underline{y^2 - x + 1 = cy}$ olarak

bulunur.

⑥ Lineer Diferansiyel Denklemler

y bağımlı, x bağımsız değişkenli birinci mertebeden bir **lineer diferansiyel denklem,** P ve Q sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad --- (2.14)$$

formunda yazılabilen bir denklemdir. x bağımlı, y bağımsız değişkenli bir lineer denklem

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \quad --- (2.15)$$

formundadır

(2.14) denklemi

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0$$

diferansiyel formda yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= P(x)y - Q(x) \\ N(x,y) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_y &= P(x) \\ N_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M_y \neq N_x \text{ olduğundan}$$

denklem tam değildir.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = P(x)$$

olup x'e bağlı olduğundan integral çarpanı $\lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$ olur.

O halde

$$e^{\int P(x)dx}\left(P(x)y - Q(x)\right)dx + e^{\int P(x)dx}\,dy = 0$$

tam diferansiyel denklemdir. Gruplama yöntemi ile

$$e^{\int P(x)dx} P(x)y\,dx + e^{\int P(x)dx}\,dy = e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$$

$$d\left(y\,e^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx$$

yazılır. İntegral alınarak genel çözüm

$$y\,e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c\right)$$

olarak bulunur.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ lineer denklemi için $\lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$

olmak üzere genel çözüm $y = \frac{1}{\lambda(x)}\left(\int \lambda(x)Q(x)dx + c\right)$ şeklindedir.

Lineer denklem $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ formunda ise

$\lambda(y) = e^{\int P(y)dy}$ olmak üzere genel çözüm $y = \frac{1}{\lambda(y)}\left(\int \lambda(y)Q(y)dy + c\right)$

şeklindedir.

Örnek; $xy' + 2y = x^3$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem x ile bölünürse

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2$$

lineer denklemi elde edilir. $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = x^2$ dir.

$$\lambda(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$ olmak üzere

$$\lambda(x)y = \int \lambda(x)Q(x)dx + c$$

genel çözüm formülünden

$$x^2 y = \int x^2 . x^2 dx + c$$

$$x^2 y = \frac{x^5}{5} + c$$

çözümü bulunur.

Örnek: $dx - 2y(x+e^{y^2})dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y(x+e^{y^2})}$$ lineer formda değildir.

$$\frac{dx}{dy} = 2y(x+e^{y^2}) \Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2yx = 2ye^{y^2}$$ lineer denklem

$P(y) = -2y$, $Q(y) = 2ye^{y^2}$ dir. Bu durumda

$$\lambda(y) = e^{\int P(y)dy} = e^{\int -2y\,dy} = e^{-y^2}$$ olup genel çözüm

$$\lambda(y).x = \int \lambda(y)Q(y)\,dy + c$$

$$e^{-y^2}.x = \int e^{-y^2}\,2ye^{y^2}\,dy + c$$

$$e^{-y^2}.x = \int 2y\,dy + c$$

$$e^{-y^2}.x = y^2 + c$$

olarak bulunur.

Örnek: $\cos x\, y' + y \sin x = 1$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} y = \frac{1}{\cos x}$$ olup lineer denklemdir.

$$P(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad Q(x) = \frac{1}{\cos x}$$ olmak üzere

$$\lambda(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-\ln(\cos x)} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$$

olup genel çözüm

$$\lambda(x)\, y = \int \lambda(x)\, Q(x)\, dx + c$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx + c$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \int \sec^2 x \, dx + c$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \tan x + c \Rightarrow \underline{y = \sin x + c \cos x}$$ bulunur.

Örnek: $(2y\sin x-1)dx-\cos x\,dy=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1. yol: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y\sin x-1}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2\sin x}{\cos x}y=-\dfrac{1}{\cos x}$ lineer denklem

olup $\lambda(x)=e^{\int -\frac{2\sin x}{\cos x}dx}=e^{2\ln\cos x}=(\cos x)^2=\cos^2 x$ olmak üzere

genel çözüm

$$(\cos^2 x)y=\int -\frac{1}{\cos x}\cdot\cos^2 x\,dx+c \Rightarrow (\cos^2 x)y=-\sin x+c \text{ dur.}$$

2. yol: $\left.\begin{array}{l} M(x,y)=2y\sin x-1 \\ N(x,y)=-\cos x \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} M_y=2\sin x \\ N_x=\sin x \end{array}\right)$ $M_y\neq N_x$ olup denklem tam değildir.

$\dfrac{M_y-N_x}{N}=\dfrac{2\sin x-\sin x}{-\cos x}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$ olup $\lambda(x)=e^{\int -\frac{\sin x}{\cos x}dx}=e^{\ln\cos x}$
$\Rightarrow \lambda(x)=\cos x$

integral çarpanıdır. Bu durumda

$(2y\sin x\cos x-\cos x)\,dx-\cos^2 x\,dy=0$ tam diferansiyel denklemdir.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y\sin x\cos x-\cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\cos^2 x$ olacak şekilde

bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır bunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos^2 x \Rightarrow u(x,y) = -\int \cos^2 x \, dy + h(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\cos^2 x \, y + h(x) \quad \text{dur.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\cos x.(-\sin x)y + h'(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2y\sin x\cos x - \cos x$$

olduğundan

$$\cancel{2\sin x\cos x . y} + h'(x) = \cancel{2y\sin x\cos x} - \cos x$$

$$h'(x) = -\cos x$$

$$h(x) = -\sin x \quad \text{bulunur.}$$

$u(x,y) = -\cos^2 x \, y - \sin x$ olacağından $u(x,y) = c$ genel çözümü

$$(\cos^2 x)y + \sin x = c$$

olarak bulunur.

➡ Denklemin lineer olduğu görülürse çözüm daha kolay elde edilir.

Örnek: $y' = y(e^x + \ln y)$ denkleminin çözümünü bulunuz

$\frac{dy}{dx} = y(e^x + \ln y)$ tam diferansiyel değildir, integral çarpanı da yoktur, lineer değildir.

Uygun bir dönüşüm yapalım:

$\frac{y'}{y} = e^x + \ln y$

$\ln y = u$, $u = u(x)$ dersek $\frac{y'}{y} = u'$ olur. Böylece denklem

$u' = e^x + u \Rightarrow u' - u = e^x$ lineer denklemine indirgenir.

$P(x) = -1$, $Q(x) = e^x$ olmak üzere

$\lambda(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$ olup lineer denklemin

çözümü

$e^{-x} \cdot u = \int e^x \cdot e^{-x} dx + c \Rightarrow e^{-x} u = x + c$ olur.

$u = \ln y$ yazılırsa istenen genel çözüm

$e^{-x} \ln y = x + c$

olarak bulunur.

Örnek: $\cos y \cdot y' + \sin y + x^2 + 2x = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$\sin y = u$, $u = u(x)$ dersek $y' \cos y = u'$ olur. Denklem

$u' + u + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow u' + u = -x^2 - 2x$ lineer denklemine indirgenir.

$P(x) = 1$, $Q(x) = -x^2 - 2x$ için $\lambda(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$ olup lineer denklemin çözümü

$$e^x \cdot u = \int e^x(-x^2 - 2x)\,dx + c$$

$$e^x u = -\int x^2 e^x dx - \int 2x e^x dx + c \qquad x^2 = t \quad e^x dx = dv$$

$$e^x u = -x^2 e^x + \cancel{\int 2x e^x dx} - \cancel{\int 2x e^x dx} + c \qquad 2x dx = dt \quad v = e^x$$

$$e^x u = -x^2 e^x + c$$

olur. $u = \sin y$ yazılırsa istenen çözüm $e^x(\sin y + x^2) = c$ bulunur.

⇒ İntegral çarpanı yöntemiyle de çözümü bulunuz.