7 Bernoulli Diferansiyel Denklemi

P ve Q sürekli fonksiyonlar ve $n \neq 0$, $n \neq 1$ reel sayı olmak üzere y bağımlı, x bağımsız değişkenli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{---} (2.16)$$

diferansiyel denklemine **Bernoulli diferansiyel denklemi** denir. x bağımlı y bağımsız değişken olması halinde

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n \quad \text{---} (2.17)$$

yine bir Bernoulli diferansiyel denklemidir.

$n=0$ ise $\quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ lineer denklemi

$n=1$ ise $\quad \frac{dy}{dx} = \left(Q(x) - P(x)\right)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(Q(x) - P(x)\right)dx$ değişkenlerine ayrılabilir denklemdir.

Teorem: (2.16) Bernoulli diferansiyel denklemi $u = y^{1-n}$ dönüşümü ile x bağımsız, u bağımlı değişkenli bir lineer denkleme indirgenir.

İspat: (2.16) Bernoulli denkleminin her bir terimi y^n ile bölünürse

$$y^{-n} y' + P(x)\, y^{1-n} = Q(x)$$

dur.

$u = y^{1-n}$ denirse $u' = (1-n)\, y^{-n} y'$ olup buradan

$$\frac{u'}{(1-n)} + P(x)\, u = Q(x) \Rightarrow u' + (1-n)\, P(x)\, u = (1-n)\, Q(x)$$ lineer

denklemi elde edilir. Bilinen yöntemle lineer denklem çözülüp $u = y^{1-n}$ yazılırsa Bernoulli denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek: $xy' - y = \frac{x+1}{y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem düzenlenirse

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{x+1}{x}\,y^{-1}$$ olup $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{x+1}{x}$, $n=-1$ dan

Bernoulli denklemidir.

$u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$ dönüşümü yaparsak $u' = 2yy'$ olur.

Bernoulli denklemi $y^n = y^{-1}$ ile bölünürse

$$yy' - \frac{1}{x}y^2 = \frac{x+1}{x}$$ olup buradan

$$\frac{u'}{2} - \frac{1}{x}u = \frac{x+1}{x} \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = \frac{2(x+1)}{x}$$ lineer denklemi

elde edilir. $\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ olmak üzere

lineer denklemin çözümü

$$\frac{1}{x^2}u = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2(x+1)}{x}\,dx + c$$

$$\frac{1}{x^2}u = 2\int \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + c$$

$$\frac{1}{x^2}u = 2\int \frac{1}{x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^3}\,dx + c$$

$$\frac{1}{x^2}u = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + c$$

$$u = -2x - 1 + cx^2$$

olur. $u = y^2$ yazılırsa $y^2 + 2x + 1 = cx^2$ genel çözümü bulunur.

Dönüşüm sonrası $u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$ lineer denklem formundan kolaylıkla

$n = -1$, $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{x+1}{x}$ için

$u' - \frac{2}{x}u = \frac{2(x+1)}{x}$ lineer denklemi yazılabilir.

Not: $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n$ formundaki Bernoulli denklemi için $u = x^{1-n}$ dönüşümü uygulanırsa $u' + (1-\alpha)P(y)u = (1-\alpha)Q(y)$ lineer denklemi elde edilir.

Örnek: $dx - (2xy^{-1} + x^4)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dx}{dy} = 2\frac{x}{y} + x^4 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = x^4$$ Bernoulli denklemidir

$P(y) = -\frac{2}{y}$, $Q(y) = 1$, $n = 4$ olduğundan $u = x^{1-4} = x^{-3}$ dönüşümü sonrası

$$u' + (-3)\left(-\frac{2}{y}\right)u = (-3)1 \Rightarrow u' + \frac{6}{y}u = -3$$ lineer denklemi elde edilir.

$\lambda(y) = e^{\int \frac{6}{y}dy} = e^{6\ln y} = y^6$ olmak üzere lineer denklemin çözümü

$$y^6 . u = \int -3y^6 dy + c \Rightarrow y^6 u = -3\frac{y^7}{7} + c$$ olur.

$u = x^{-3}$ yazılırsa $\frac{y^6}{x^3} + \frac{3y^7}{7} = c$ genel çözümü bulunur.

Not: 1) $B'(y)\frac{dy}{dx}+P(x)B(y)=Q(x)(B(y))^n$ formundaki denklemler

için $u=B(y)$ dönüşümü yapılırsa $u'=B'(y)y'$ olacağından denklem

$$u'+P(x)u=Q(x)u^n$$

Bernoulli denklemine dönüştürülüp, çözülür.

2) $B'(x)\frac{dx}{dy}+P(y)B(x)=Q(y)(B(x))^n$ formundaki denklemler için

$u=B(x)$ dönüşümü yapılırsa $u'=B'(x)x'$ $\left(\frac{du}{dy}=B'(x)\frac{dx}{dy}\right)$ olacağından denklem

$$u'+P(y)u=Q(y)u^n$$

Bernoulli denklemine dönüştürülüp, çözülür.

Örnek: $y'\cos y + \frac{\sin y}{x} = (x+1)(1-\cos^2 y)$ denklemini çözünüz.

$u = \sin y$ dersek $u' = y'\cos y$ olur.

$y'\cos y + \frac{\sin y}{x} = (x+1)\sin^2 y$

$u' + \frac{1}{x}u = (x+1)u^2$ Bernoulli denklemi olur.

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x+1$, $n=2$ için $v = u^{1-n} = u^{-1}$ dönüşümü ile Bernoulli denklemi

$v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$

şeklindeki

$v' - \frac{1}{x}v = -(x+1)$

lineer denklemine indirgenir. Buradan $\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ olacağından lineer denklemin çözümü

$\frac{1}{x}v = \int -\frac{1}{x}(x+1)\,dx + c \Rightarrow \frac{1}{x}v = -x - \ln x + c$ olur.

$v = u^{-1}$ ve $u = \sin y$ için genel çözüm $\frac{1}{x\sin y} = -x - \ln x + c$ bulunur.

Örnek: $2x\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{x^2+1}{y}=\dfrac{(x^2+1)^2}{y+1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$B'(x)\dfrac{dx}{dy}+P(y)B(x)=Q(y)(B(x))^2$ formundadır.

$u=x^2+1$ dersek $u'=2xx'$ olur. $\left(\dfrac{du}{dy}=2x\dfrac{dx}{dy}\right)$ O halde

$u'+\dfrac{1}{y}u=\dfrac{1}{y+1}u^2$ Bernoulli denklemi elde edilir.

$P(y)=\dfrac{1}{y}$, $Q(y)=\dfrac{1}{y+1}$, $n=2$ için $v=u^{1-n}=u^{-1}$ dönüşümü ile

$v'-\dfrac{1}{y}v=-\left(\dfrac{1}{y+1}\right)$

lineer denklemi elde edilir. Buradan $\lambda(y)=e^{\int -\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=\dfrac{1}{y}$ olmak üzere

lineer denklemin çözümü

$\dfrac{1}{y}v=\int -\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{y+1}dy+c \Rightarrow \dfrac{1}{y}v=-\int\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}\right)dy+c$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y}v=-\ln y+\ln(y+1)+c$

olur.

$v = u^{-1}$ ve $u = x^2+1$ yerine yazılırsa verilen denklemin genel çözümü

$$\frac{1}{y(x^2+1)} = \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) + c$$

şeklinde bulunur.