8 Riccati Diferansiyel Denklemi

P, Q, R sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x) \quad --- (2.18)$$

formundaki denklemlere **Riccati diferansiyel denklemi** denir.

(2.18) de $R(x) = 0$ ise denklem Bernoulli denklemi, $Q(x) = 0$ ise denklem lineer denklem olur.

Riccati denkleminin çözümü çoğunlukla temel fonksiyonlarla ifade edilemez. Ancak en az bir özel çözümü belli ise denklemi Bernoulli veya lineer denkleme dönüştürerek çözüm bulunabilir.

Teorem; $y_1(x)$, Riccati denkleminin bir özel çözümü olsun. Riccati denklem

i) $y = y_1(x) + z(x)$ dönüşümü ile Bernoulli denklemine,

ii) $y = y_1(x) + \dfrac{1}{u(x)}$ dönüşümü ile lineer denkleme dönüşür.

İspat: i) $y_1(x)$ çözüm olduğundan denklemi sağlar yani $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)y_1^2 + R(x)$ sağlanır.

$y = y_1(x) + z(x)$ için $y' = y_1' + z'$ olacağından denklem

$$y_1' + z' + P(x)(y_1 + z) = Q(x)(y_1+z)^2 + R(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{y_1'} + z' + \cancel{P(x)y_1} + P(x)z = \cancel{Q(x)y_1^2} + 2y_1 z Q(x) + z^2 Q(x) + \cancel{R(x)}$$

$$\Rightarrow z' + (P(x) - 2y_1 Q(x))z = Q(x)z^2$$

şeklinde Bernoulli denklemi elde edilir.

ii) Yine $y_1(x)$ çözüm olduğundan $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)y_1^2 + R(x)$ sağlanır.

$y = y_1(x) + \dfrac{1}{u(x)}$ için $y' = y_1' - \dfrac{u'}{u^2}$ $\left(\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx} \right)$

olacağından denklem

Scanned with CamScanner

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + P(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) = Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + R(x)$$

$$\cancel{y_1'} - \frac{u'}{u^2} + \cancel{P(x)y_1} + P(x)\frac{1}{u} = \cancel{Q(x)y_1^2} + 2\frac{y_1}{u}Q(x) + \frac{1}{u^2}Q(x) + \cancel{R(x)}$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \left(P(x) - 2y_1Q(x)\right)\frac{1}{u} = \frac{1}{u^2}Q(x)$$

$$u' + \left(2y_1Q(x) - P(x)\right)u = -Q(x)$$

şeklinde lineer denklem elde edilir.

➔ Çözümü bulmak için $y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$ dönüşümünü kullanarak denklemi lineer denkleme indirgemek işlem kolaylığı sağlar.

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $y' - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümünü bulunuz.

$$y' \underbrace{- 2(x-1)}_{P(x)} y = \underbrace{-}_{Q(x)} y^2 \underbrace{- x^2 + 2x + 1}_{R(x)}$$ Riccati denklemidir.

$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u}$ dönüşümü ile $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$ olup

$$1 - \frac{u'}{u^2} - 2(x-1)\left(x + \frac{1}{u}\right) = -\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x^2 + 2x + 1$$

$$\cancel{1} - \frac{u'}{u^2} - \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{\frac{2x}{u}} + \frac{2}{u} = \cancel{-x^2} - \cancel{\frac{2x}{u}} - \frac{1}{u^2} \cancel{-x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{2}{u} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow u' - 2u = 1$$

lineer denklemi elde edilir. $\lambda(x) = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ olmak üzere çözümü

$$e^{-2x} u = \int 1 \cdot e^{-2x} dx + c \Rightarrow e^{-2x} u = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$ olur.

Scanned with CamScanner

$y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{y-x}$ den $\frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$ istenen çözümdür.

Örnek: $\frac{dy}{dx}+e^{x}-3y+e^{-x}y^{2}=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=e^{x}$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

$y'-3y=-e^{-x}y^{2}-e^{x}$ Riccati denklemidir.

$y=y_1+\frac{1}{u}=e^{x}+\frac{1}{u}$ dönüşümü ile $y'=e^{x}-\frac{u'}{u^{2}}$ olur.

Buradan

$$e^{x}-\frac{u'}{u^{2}}+e^{x}-3\left(e^{x}+\frac{1}{u}\right)+e^{-x}\left(e^{x}+\frac{1}{u}\right)^{2}=0$$

$$-\frac{u'}{u^{2}}-\frac{1}{u}+\frac{e^{-x}}{u^{2}}=0 \Rightarrow u'+u=e^{-x}$$ lineer denklemi elde edilir.

$\lambda(x)=e^{\int 1dx}=e^{x}$ olmak üzere lineer denklemin çözümü

$$e^{x}u=\int e^{-x}e^{x}dx+c \Rightarrow e^{x}u=x+c$$ olur.

$y=e^{x}+\frac{1}{u}$ olduğundan $u=\frac{1}{y-e^{x}}$ yerine yazılırsa istenen

genel çözüm $\frac{e^{x}}{y-e^{x}}=x+c$ olarak bulunur.

Scanned with CamScanner

Örnek: $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ şeklinde üç özel çözümü bilinen Riccati denklemini kurunuz.

Bu üç çözüm Riccati denklemini sağladığı için

$$y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$$

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x)y_1^2 + R(x)$$

$$y_2' + P(x)y_2 = Q(x)y_2^2 + R(x)$$

$$y_3' + P(x)y_3 = Q(x)y_3^2 + R(x)$$

yazılabilir. Bu sistemden P, Q, R nin yok edilmesi ancak ve ancak

$$\Delta = \begin{vmatrix} y' & y & y^2 & 1 \\ y_1' & y_1 & y_1^2 & 1 \\ y_2' & y_2 & y_2^2 & 1 \\ y_3' & y_3 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olması ile mümkün olduğundan $\Delta = 0$ aranan Riccati denklemidir.

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ iki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Riccati denklemi $y' = Q(x)y^2 - P(x)y + R(x)$ yazılırsa ve y_1 ve y_2 özel çözüm olduğundan

$$y_1' = Q(x)y_1^2 - P(x)y_1 + R(x)$$

$$y_2' = Q(x)y_2^2 - P(x)y_2 + R(x)$$

yazılır. Buradan

$$y' - y_1' = Q(x)(y^2 - y_1^2) - P(x)(y - y_1)$$

$$y' - y_2' = Q(x)(y^2 - y_2^2) - P(x)(y - y_2)$$

elde edilir. Bunlardan birincisi $\frac{1}{y-y_1}$, ikincisi $\frac{1}{y-y_2}$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa ve düzenlenirse

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = (y_1 - y_2)Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{y - y_1}{y - y_2}\right) = (y_1 - y_2)Q(x)$$

$$\ln \frac{y - y_1}{y - y_2} = \int (y_1 - y_2)Q(x)\,dx + c \Rightarrow \frac{y - y_1}{y - y_2} = c\, e^{\int (y_1 - y_2)Q(x)\,dx}$$

çözümü bulunur.

Scanned with CamScanner

Örnek: $y(x)=\frac{k}{x}$, k nın iki farklı değeri için $x^2(y'+y^2)=2$ denkleminin çözümleridir. Bu çözümleri bularak denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y(x)=\frac{k}{x}$ çözüm ise denklemi sağlar. $y'=-\frac{k}{x^2}$ olduğundan

$$x^2\left(-\frac{k}{x^2}+\frac{k^2}{x^2}\right)=2 \Rightarrow -k+k^2=2 \Rightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow k=2, \quad k=-1$$

olacağından özel çözümler $y_1(x)=\frac{-1}{x}$ ve $y_2(x)=\frac{2}{x}$ dir.

Denklem düzenlenirse

$$y'+y^2=\frac{2}{x^2} \Rightarrow y'=-y^2+\frac{2}{x^2}$$ Riccati denklemidir.

$P(x)=0$, $Q(x)=-1$, $R(x)=\frac{2}{x^2}$ dir. İki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin genel çözümü

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=c\,e^{\int(y_1-y_2)Q(x)dx} \Rightarrow \frac{y+\frac{1}{x}}{y-\frac{2}{x}}=c.e^{\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)(-1)dx}$$

$$\Rightarrow \frac{xy+1}{xy-2}=cx^3$$ şeklindedir.

Scanned with CamScanner

Özet: $y' = f(x,y)$ denkleminin genel çözümü için

1. $y' = h(x)g(y)$ yazılabilirse $\dfrac{dy}{g(y)} = h(x)dx$ olup DA dır. İntegral alınıp çözüm bulunur.

2. $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ yazılabilirse HD dir ve $y = ux$ ile $y' = u'x + u$ olup denklem DA olur.

3. $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$
   - $\to a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ ise uygun dönüşüm ile denklem DA olur.
   - $\to a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ise $\left.\begin{array}{l} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ dan (h,k) bulunur ve $\left.\begin{array}{l} u = x + h \\ v = y + k \end{array}\right\}$ ile denklem HD olur.

4. $y' = f(x,y) \Rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ yazılırsa ve $M_y = N_x$ $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ ise TD dir.

5. $M_y \neq N_x$ ise denklem TD değildir. Bu durumda İÇ aranır.

$\dfrac{M_y - N_x}{N} \to$ sadece x e bağlı ise $\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$, $\dfrac{M_y - N_x}{-M} \to$ sadece y ye bağlı ise $\lambda(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$

için $\lambda M(x,y)dx + \lambda N(x,y)dy = 0$ TD olur.

6. $y' + P(x)y = Q(x)$ ise LD dir ve $\lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$ için $\lambda(x)y = \int \lambda(x)Q(x)dx + c$ genel çözüm

7. $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ise BD dir ve $u = y^{1-n}$ ile $u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$ LD olur.

8. $y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$ ise RD dir ve y_1 özel çözüm ise $y = y_1 + \frac{1}{u}$ ile LD olur.

CS Scanned with CamScanner

Karışık Örnekler

➡ Verilen denklemler aynı anda birkaç denklem türüne ait olabilir. Bu durumda istenilen çözüm yolu kullanılabilir, bulunacak genel çözüm aynı olur.

Örnek 1) $(x^5+3y)dx - x\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1. yol: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^5+3y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4$ lineer denklemdir.

$\lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ olmak üzere genel çözüm

$$\frac{1}{x^3}y = \int x^4 \cdot \frac{1}{x^3}\,dx + c \Rightarrow \frac{1}{x^3}y = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2y - x^5 = 2cx^3 \text{ olur}$$

2. yol: $\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^5+3y \\ N(x,y) = -x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} M_y = 3 \\ N_x = -1 \end{array}\right\}$ $M_y \neq N_x$ olup denklem tam değildir.

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3-(-1)}{-x} = -\frac{4}{x}$ x'e bağlı olup $\lambda(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4}$ integral çarpanıdır.

Scanned with CamScanner

Denklem $\lambda(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ ile çarpılırsa

$$\left(x + \frac{3y}{x^4}\right)dx - \frac{1}{x^3}dy = 0$$ tam diferansiyel denklem elde edilir.

Gerçekten

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= x + \frac{3y}{x^4} \\ Q(x,y) &= -\frac{1}{x^3} \end{aligned}\right) \quad \left.\begin{aligned} P_y &= \frac{3}{x^4} \\ Q_x &= \frac{3}{x^4} \end{aligned}\right) \quad P_y = Q_x$$ olup tam diferansiyeldir.

O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{3y}{x^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^3}$$ olacak şekilde $u(x,y)$ vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow u(x,y) = \int -\frac{1}{x^3}\,dy + h(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\frac{y}{x^3} + h(x)$$ olur. x'e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3y}{x^4} + h'(x)$$ olur ve $$\frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{3y}{x^4}$$ olduğundan

$$\cancel{\frac{3y}{x^4}} + h'(x) = x + \cancel{\frac{3y}{x^4}} \Rightarrow h'(x) = x \Rightarrow h(x) = \int x\,dx \Rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2}$$

bulunur.

Genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$$-\frac{y}{x^3} + \frac{x^2}{2} = c \Rightarrow -2y + x^5 = 2cx^3$$ bulunur

veya $2y - x^5 = 2c_1 x^3$ yazılabilir.

CS Scanned with CamScanner

Örnek 2) $(x^4+y^4)dx - xy^3dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1. yol: $(\underbrace{x^4}_{der\,4}+\underbrace{y^4}_{der\,4})\,dx - \underbrace{xy^3}_{der\,4}dy = 0$ M ve N aynı dereceden olduğundan denklem homojendir, veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+y^4}{xy^3} = \frac{x^4\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right)}{x^4\left(\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$ formunda

olduğundan homojen denklemdir.

$\frac{y}{x} = u$ dersek $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$ olup

$$u'x + u = \frac{1+u^4}{u^3} \Rightarrow u'x = \frac{1}{u^3} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1}{u^3}$$

$\Rightarrow u^3du = \frac{dx}{x}$ değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir

$\Rightarrow \frac{u^4}{4} = \ln x + c$ çözümüdür.

$u = \frac{y}{x}$ yazılırsa istenen genel çözüm

$$\frac{y^4}{4x^4} = \ln x + c$$

olarak bulunur.

Scanned with CamScanner

2.yol: Denklem düzenlenirse

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = x^3 y^{-3}$$

şeklinde $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^3$, $n = -3$ olan Bernoulli denklemi olur.

$$u = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4 \text{ dönüşümü yapılırsa}$$

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

lineer denklemi elde edileceğinden

$$u' - \frac{4}{x} u = 4x^3$$

lineer denklem olur. $\lambda(x) = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ için

lineer denklemin çözümü

$$\frac{1}{x^4} \cdot u = \int \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 dx + c \Rightarrow \frac{1}{x^4} u = 4\ln x + c \text{ bulunur.}$$

$u = y^4$ yerine yazılırsa istenen genel çözüm

$$\frac{y^4}{x^4} = 4\ln x + c$$

olarak bulunur.

Scanned with CamScanner

3.yol: $(x^4+y^4)dx - xy^3dy = 0$ için

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= x^4+y^4 \\ N(x,y) &= -xy^3 \end{aligned}\right) \quad \left.\begin{aligned} M_y &= 4y^3 \\ N_x &= -y^3 \end{aligned}\right)$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam değildir.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4y^3-(-y^3)}{-xy^3} = \frac{5y^3}{-xy^3} = \frac{-5}{x}$$, sadece x'e bağlı olup

$$\lambda(x) = e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5\ln x} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$ integral çarpanıdır. Bu durumda

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$ tam diferansiyel denklem olur.

O halde $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{y^4}{x^5}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{y^3}{x^4}$ olacak şekilde $u(x,y)$ vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y^3}{x^4} \Rightarrow u(x,y) = \int -\frac{y^3}{x^4}dy + h(x) \Rightarrow u(x,y) = -\frac{y^4}{4x^4} + h(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{\frac{y^4}{x^5}} + h'(x) = \frac{1}{x} + \cancel{\frac{y^4}{x^5}} \Longrightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h(x) = \ln x$$

$u(x,y) = c$ genel çözüm olup $\dfrac{-y^4}{4x^4} + \ln x = c$ olarak bulunur.

Scanned with CamScanner

Örnek 3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{y-4x}$ denkleminin çözümünü bulunuz

1. yol: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y-4x}{y+1} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} + \dfrac{4}{y+1}x = \dfrac{y}{y+1}$ olup lineer denklem dur.

$\lambda(y) = e^{\int \frac{4}{y+1}dy} = e^{4\ln(y+1)} = (y+1)^4$ olmak üzere genel çözüm

$$(y+1)^4 \cdot x = \int \frac{y}{y+1} \cdot (y+1)^4 \, dy + c$$

$$(y+1)^4 x = \int y(y+1)^3 dy + c$$

$y+1 = u \Rightarrow dy = du$

$y = u-1$

$$(y+1)^4 x = \int (u-1)u^3 du + c$$

$$(y+1)^4 x = \int (u^4 - u^3) du + c$$

$$(y+1)^4 x = \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + c$$

$$(y+1)^4 x = \frac{(y+1)^5}{5} - \frac{(y+1)^4}{4} + c$$

$x = \dfrac{y+1}{5} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{c}{(y+1)^4}$ olarak bulunur.

Scanned with CamScanner

2-yol: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{y-4x}$ $\left.\begin{array}{l} a_1=0,\ b_1=1,\ c_1=1 \\ a_2=-4,\ b_2=1,\ c_2=0 \end{array}\right\}$ $\exists\, c_1, c_2 \neq 0$ ve

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0-(-4) = 4 \neq 0$ olduğundan denklem homojen denkleme indirgenebilir.

$\left.\begin{array}{l} k+1=0 \\ k-4h=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} k=-1 \\ h=-\frac{1}{4} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = u-\frac{1}{4} \\ y = v-1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$ olup

$$\frac{dv}{du} = \frac{v-1+1}{v-1-4\left(u-\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{v}{v-4u}$$ homojen denklemi elde edilir.

$v = tu \Rightarrow v' = t'u + t$ $\left(\dfrac{dv}{du} = \dfrac{dt}{du}u + t\right)$ dönüşümü ile

$$t'u + t = \frac{tu}{tu-4u} \Rightarrow t'u = \frac{5t-t^2}{t-4} \Rightarrow \frac{dt}{du}u = \frac{5t-t^2}{t-4}$$

$$\Rightarrow \frac{t-4}{5t-t^2}dt = \frac{du}{u}$$ değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir.

$$\Rightarrow \int\left(-\frac{4}{5}\frac{1}{t} + \frac{1}{5}\frac{1}{5-t}\right)dt = \int\frac{du}{u} \Rightarrow -\frac{4}{5}\ln t - \frac{1}{5}\ln(5-t) = \ln u + \ln c$$

$t = \frac{v}{u}$, $u = x+\frac{1}{4}$, $v = y+1$ olduğundan $x = \dfrac{y+1}{5} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{c}{(y+1)^4}$ elde edilir.

Scanned with CamScanner

3 yol: $(y+1)\,dx + (4x-y)\,dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = y+1 \\ N(x,y) = 4x-y \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} M_y = 1 \\ N_x = 4 \end{array}\right)$ $M_y \neq N_x$ olduğundan tam değildir.

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-4}{4x-y} = -\frac{3}{4x-y}$ sadece x'e bağlı değil

$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1-4}{-(y+1)} = \frac{3}{y+1}$ sadece y'ye bağlı $\Rightarrow \lambda(y) = e^{\int \frac{3}{y+1} dy} = (y+1)^3$

integral çarpanı olup $(y+1)^4 dx + (y+1)^3 (4x-y)\,dy = 0$ tam diferensiyel olur.

$\frac{\partial u}{\partial x} = (y+1)^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (y+1)^3 (4x-y)$ olacak şekilde $u(x,y)$ vardır.

$\frac{\partial u}{\partial x} = (y+1)^4 \Rightarrow u(x,y) = \int (y+1)^4 dx + h(y)$

$u(x,y) = x(y+1)^4 + h(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x(y+1)^3 + h'(y) = (y+1)^3(4x-y) \Rightarrow h'(y) = -y(y+1)^3$

$\Rightarrow h(y) = -\frac{(y+1)^5}{5} + \frac{(y+1)^4}{4}$

genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$x(y+1)^4 - \frac{(y+1)^5}{5} + \frac{(y+1)^4}{4} = c \Rightarrow x = \frac{y+1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{c}{(y+1)^4}$ bulunur.

CS Scanned with CamScanner

Örnek 4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy}{x^2+y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1. yol: $2xy\,dx + (x^2+y)dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 2xy \\ N(x,y) &= x^2+y \end{aligned}\right) \quad \left.\begin{aligned} M_y &= 2x \\ N_x &= 2x \end{aligned}\right)$$

$M_y = N_x$ olduğundan denklem tamdır.

Gruplandırma yapılırsa

$$(2xy\,dx + x^2dy) + y\,dy = 0$$

$$d(x^2y) + y\,dy = d(c)$$

$$x^2y + \frac{y^2}{2} = c$$

genel çözümü bulunur.

2. yol: $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x^2+y}{2xy} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1}{2y}x = -\dfrac{1}{2}x^{-1}$ olup Bernoulli

denklemidir. $P(y) = \frac{1}{2y}$, $Q(y) = -\frac{1}{2}$, $n=-1$ için $u = x^{1-(-1)} = x^2$ dönüşümü

ile $u' + \frac{1}{y}u = -1$ lineer denklemi elde edilir. $\lambda(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$ için

genel çözüm $yu = \int -y\,dy + c \Rightarrow yu = -\frac{y^2}{2} + c$ olup $u = x^2$ den $yx^2 = -\frac{y^2}{2} + c$ bulunur.

Scanned with CamScanner