

1.6.3 Sabit Katsayılı Hale Dönüştürülebilen Denklemler

Tanım 3 Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x) \quad \text{--- (19)}$$

tipindeki n . mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlere

Cauchy-Euler denklemi denir. Burada a_0, a_1, \dots, a_n sabitlerdir. Bu denklemler bir bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı hale indirilerek çözülür.

Teorem 18: (19) ile verilen Cauchy-Euler denklemi, $x > 0$, $x = e^t$ (veya $t = \ln x$) değişken değişimi ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.

İspat: $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü ile x göre olan türevleri t göre türevler cinsinden ifade ederiz:

Türev değeri kını karıstırmamalıdır

$$D_x = \frac{d}{dx}, \quad D_t = \frac{d}{dt}$$

gösterim kını kullanalım. Buna göre $t = \ln x, x > 0$ için

$$\bullet y' = D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = D_t y \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x y' = x D_x y = D_t y$$

$$\bullet y'' = D_x^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right)$$

$$= \frac{d^2 y}{dt^2} \underbrace{\left(\frac{dt}{dx} \right)^2}_{\left(\frac{1}{x} \right)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d^2 t}{dx^2}}_{-\frac{1}{x^2}} = D_t^2 y \cdot \frac{1}{x^2} - D_t y \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} D_t (D_t - 1) y$$

$$\Rightarrow x^2 y'' = x^2 D_x^2 y = D_t (D_t - 1) y \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned} \bullet y''' = D_x^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^2 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} (D_t^3 y - 3 D_t^2 y + 2 D_t y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 y''' = x^3 D_x^3 y = (D_t^3 - 3 D_t^2 + 2 D_t) y = (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Genel olarak

$$y^{(n)} = D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n} (D_t - (n+1))(D_t - (n-1)) \dots (D_t - 1) D_t y$$

olmak üzere

$$x^n y^{(n)} = x^n D_x^n y = (D_t - n+1)(D_t - n+2) \dots (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Bu ifadeler (19) da yerine yazılırsa

$$(a_0 D_t (D_t + 1) \dots (D_t - n + 1) + a_1 D_t (D_t + 1) \dots (D_t - n) + \dots + a_{n-1} D_t + a_0) y = b(\ln t)$$

sabit katsayılı lineer denkleme çözümleri edilir.

Not: $(-\infty, \infty)$ aralığındaki çözümleri bulmak için $-x = e^t$ dönüşümü yapılır.

Örnek: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemdir.

$$x = e^t, x > 0 \text{ için } t = \ln x$$

$$xy' = D_t y, \quad x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y \text{ olduğundan verilen denklem}$$

$$(D_t(D_t - 1) - 2D_t + 2)y = (e^t)^3$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - D_t - 2D_t + 2)y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - 3D_t + 2)y = e^{3t} \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y = y(t) \end{array} \right\}$$

Farklı sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bunun çözümü için

$$l(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ den}$$

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \text{ homojenin çözümüdür. Özel çözüm}$$

$$y_ö = \frac{1}{D_t^2 - 3D_t + 2} e^{3t} = \frac{1}{3^2 - 3 \cdot 3 + 2} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Genel çözüm } y = y_h + y_ö = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t} \text{ olup } t = \ln x \text{ için}$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3 \text{ olarak bulunur.}$$

^y Örnek: $x^2 y''' + 5xy'' + 3y' = x \ln x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem bu hali ile Cauchy-Euler denklemini değildir. Denklemin her iki yanını x ile çarpılırsa

$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 3xy' = x^2 \ln x$ olup Cauchy-Euler denklemini elde edilir.

$x = e^t$, $x > 0$ dönüşümü ile

$$xy' = D_t y$$

$$x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$$

$$x^3 y''' = D_t(D_t - 1)(D_t - 2)y$$

olup bütün denklemlerde yerine yazılırsa

$$(D_t(D_t - 1)(D_t - 2) + 5D_t(D_t - 1) + 3D_t)y = e^{2t} \cdot t$$

$$(D_t^3 + 2D_t^2)y = t e^{2t}$$

sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümü:

$$l(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2$$

için $y_h = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t}$ dur.

$$\begin{aligned} y_o &= \frac{1}{D_t^3 + 2D_t^2} t e^{2t} = e^{2t} \frac{1}{(D_t + 2)^3 + 2(D_t + 2)^2} t \\ &= e^{2t} \frac{1}{D_t^3 + 8D_t^2 + 20D_t + 16} t = \frac{e^{2t}}{16} \left\{ 1 - \frac{D_t^2 + 8D_t + 20}{16} + \dots \right\} t \\ &\quad 16 \left\{ 1 + \frac{D_t^2 + 8D_t + 20}{16} \right\} \\ &= \frac{e^{2t}}{16} \left\{ t - \frac{20}{16} \right\} = \frac{e^{2t}}{16} \left\{ t - \frac{5}{4} \right\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu göre genel çözüm

$$y = y_h + y_o = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + \frac{e^{2t}}{16} \left\{ t - \frac{5}{4} \right\}$$

$x = e^t, t = \ln x$ için $y = c_1 + c_2 \ln x + c_3 x^{-2} + \frac{x^2}{16} \left\{ \ln x - \frac{5}{4} \right\}$
şeklindedir.

Tanım 3 Her bir terimi $(bx+c)^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı olan

$$a_0 (bx+c)^n y^{(n)} + a_1 (bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (bx+c) y' + a_n y = b(x) \quad (20)$$

tipindeki n -merkebeden denklemlere **Legendre denklemi** denir. Bu

denklemin $bx+c=u$ dönüşümü ile Cauchy-Euler denklemine dönüşür.

Teorem 19.1. (20) Legendre denklemi $bx+c=e^t$ dönüşümü ile y bağımlı ve t bağımsız değişkenli sabit katsayılı bir denkleme indirgenerek çözülür.

İspat: $bx+c=e^t \Rightarrow t=\ln(bx+c)$

$$\bullet y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = D_t y \cdot \frac{1}{bx+c} \Rightarrow (bx+c) y' = b D_t y$$

$$\bullet y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{b^2}{(bx+c)^2} (D_t^2 - D_t) y \Rightarrow (bx+c)^2 y'' = b^2 D_t (D_t - 1) y$$

$$\bullet y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{b^n}{(bx+c)^n} (D_t - n+1)(D_t - n+2) \dots (D_t - 1) D_t y$$

$$\Rightarrow (bx+c)^n y^{(n)} = b^n D_t (D_t - 1) \dots (D_t - n+1) y \quad \text{olup burada 141-}$$

$$\left(a_0 b^n D_t(D_t-1) \dots (D_t-n+1) + a_1 b^{n-1} D_t(D_t-1) \dots (D_t-n+2) + \dots + a_{n-2} b^2 D_t(D_t-1) + a_{n-1} b D_t + a_n \right) y = b(t)$$

sabit katsayılı denklemler elde edilerek çözümleri bulunabilir.

Örnek: $(x+2)^3 y''' + (x+2)^2 y'' + (x+2) y' = (x+2)$ denkleminin çözümleri bulunuz

Denklemin Legendre denklemini olup $x+2 = e^t$ dönüşümü yapılırsa

$$(x+2) y' = D_t y$$

$$(x+2)^2 y'' = D_t(D_t-1)y$$

$$(x+2)^3 y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

olup bunları denkleme yerlerine yazılırsa

$$(D_t(D_t-1)(D_t-2) + D_t(D_t+1) + D_t)y = e^t$$

$$\Rightarrow (D_t^3 - 2D_t^2 + 2D_t)y = e^t$$

sabit katsayılı denklemin elde edilir.

$$l(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1+i, \lambda_3 = 1-i$$

$$\text{İnön } y_h = c_1 + e^t \{ c_2 \cos t + c_3 \sin t \} \text{ olur.}$$

$$y_{\ddot{}} = \frac{1}{D_t^3 - 2D_t^2 + 2D_t} e^t = \frac{1}{1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1} e^t = e^t \text{ olur.}$$

Genel çözüm

$$y = y_h + y_{\ddot{}} = c_1 + e^t \{ c_2 \cos t + c_3 \sin t \} + e^t$$

$$= c_1 + (x+2) \{ c_2 \cos(\ln|x+2|) + c_3 \sin(\ln|x+2|) \} + x+2$$

olarak bulunur.