Uygulama -4-

① $x^3y''' - x^2(x+3)y'' + 2x(x+3)y' - 2(x+3)y = 0$ denklemi verilsin.

ⓐ Bu denklemin x^m, $m \in \mathbb{Z}$ formunda iki lineer bağımsız çözüme sahip olduğunu gösteriniz. ⓑ Bulunan çözümler yardımıyla denklemin mertebesini düşürünüz. ⓒ Genel çözümünü bulunuz.

ⓐ $y = x^m$, $m \in \mathbb{Z}$ çözüm ise

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$ için

$$\{m(m-1)(m-2) - (x+3)m(m-1) + 2(x+3)m - 2(x+3)\}x^m = 0$$

$$(m-1)(m-2)(m-3-x)x^m = 0$$

$\Rightarrow m=1,\ m=2$ için $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ iki lineer bağımsız çözümdür.

ⓑ $y_1 = x$ için $y = y_1 u = xu$ dönüşümü yapılırsa

$$y' = u + xu', \quad y'' = 2u' + xu'', \quad y''' = 3u'' + xu'''$$

olup denklem

$$x^3(3u''+xu''')-x^2(x+3)(2u'+xu'')+2x(x+3)(u+xu')-2(x+3)xu=0$$

$$\Rightarrow x^4u'''-x^4u''=0$$

$$\Rightarrow u'''-u''=0$$

haline gelir. Burada $u''=v$, $u'''=v'$ denirse bu denklemde

$$v'-v=0$$

şeklinde birinci mertebeden denkleme indirgenir.

$$v'-v=0 \Rightarrow v'=v \Rightarrow \frac{dv}{v}=dx \Rightarrow \ln v=x+c$$

$$\Rightarrow v=c_1e^x \text{ olur.}$$

$$u''=v \Rightarrow u''=c_1e^x$$

$$\Rightarrow u'=c_1e^x+c_2$$

$$\Rightarrow u=c_1e^x+c_2x+c_3 \quad \text{dur.}$$

$y=xu$ olduğundan

$$y=c_1xe^x+c_2x^2+c_3x \quad \text{genel çözümdür.}$$

(2) $x^3y''' + xy' - y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemi olduğundan $x = e^t$, $x>0$ dönüşümü yapılırsa

$xy' = D_t y$

$x^3y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$ olacağından denklem

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + D_t - 1\right)y = 0 \Rightarrow \left(D_t^3 - 3D_t^2 + 3D_t - 1\right)y = 0$$

şeklinde sabit katsayılı denkleme indirgenir.

$(D_t^3 - 3D_t^2 + 3D_t - 1)y = 0$

$\Rightarrow (D_t - 1)^3 y = 0$

$\ell(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ için

$y = y_h = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^t$

$y = (c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x)x$ genel çözümdür.

③ $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemde y bağımlı değişkeni olmadığı için

$y' = u$, $y'' = u'$ dönüşümü ile mertebe düşürülebilir

$(1-x^2)u' - xu = 2 \Rightarrow u' - \frac{x}{1-x^2}u = \frac{2}{1-x^2}$ birinci

mertebeden lineer denklem dur.

$\lambda(x) = e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \sqrt{1-x^2}$ için lineer denkle-

min genel çözümü

$$\sqrt{1-x^2}\cdot u = \int \frac{2}{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx + c_1$$

$$\sqrt{1-x^2}\,u = 2\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + c_1$$

$$\sqrt{1-x^2}\,u = 2\arcsin x + c_1 \Rightarrow u = (1-x^2)^{-1/2}(2\arcsin x + c_1)$$

bulunur.

$$y' = u = (1-x^2)^{-1/2}(2\arcsin x + c_1)$$

$$\Rightarrow y = 2\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + c_1 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_2$$

$$\Rightarrow y = (\arcsin x)^2 + c_1 \arcsin x + c_2$$

şeklinde çözüm bulunur.

4) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 6(1-x^2)^2$ denkleminin homojen kısmının ikinci dereceden polinomlar şeklinde çözümlerini bularak genel çözümünü bulunuz.

$y_h = ax^2 + bx + c$ şeklinde ise buradan

$y_h' = 2ax + b, \quad y_h'' = 2a$ için

$$(1-x^2)2a + 2x(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) = 0$$

$\Rightarrow \quad 2(a-c) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c$ olup b keyfidir. Böylece

$y_h = ax^2 + bx + c = a(x^2+1) + bx$ olur. Buna göre lineer bağımsız çözümler $y_1 = 1 + x^2$, $y_2 = x$ dir. Sabitin değişimi yöntemi ile özel çözümü ararsak

$y_ö = v_1(x)(x^2+1) + v_2(x)\,x$ için

$$\left.\begin{aligned} v_1'(x^2+1) + v_2'x &= 0 \\ v_1' \cdot 2x + v_2' &= 6(1-x^2) \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümünden

$$v_1' = -6x \Rightarrow v_1(x) = -3x^2$$
$$v_2' = 6(x^2+1) \Rightarrow v_2(x) = 2x^3 + 6x$$

olacağından

$$y_ö = -3x^2(x^2+1) + (2x^3+6x)x = -x^4 + 3x^2 \text{ dur.}$$

Genel çözüm

$$y = a(x^2+1) + bx + 3x^2 - x^4$$
$$= a(x^2+1) + bx + 3(x^2+1) - x^4 - 3$$
$$= (a+3)(x^2+1) + bx - x^4 - 3$$
$$= c_1(x^2+1) + c_2 x - x^4 - 3$$

şeklindedir.

5) $(3x+2)^2y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2+4x+1$ denklemini çözünüz.

Denklem Legendre denklemi olup $3x+2=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

$(3x+2)y' = 3D_t y$

$(3x+2)y'' = 3^2 D_t(D_t-1)y$ olup

$3x^2+4x+1 = \frac{(3x+2)^2-1}{3}$

$$\left(9D_t(D_t-1) + 3.3D_t - 36\right)y = \frac{e^{2t}-1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(9D_t^2 - 36\right)y = \frac{e^{2t}-1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(D_t^2-4\right)y = \frac{e^{2t}-1}{27}$$ sabit katsayılı denklemi elde edilir.

Buradan genel çözüm $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{1}{108}\left(te^{2t}+1\right)$

$$y = c_1(3x+2)^2 + c_2(3x+2)^{-2} + \frac{1}{108}\left\{(3x+2)^2\ln(3x+2)+1\right\}$$

olarak bulunur.