Uygulama 2 -

① $y''' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

$\ell(\lambda) = \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olup genel çözüm

$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} \Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ olur.

② $4y''' - 5y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = 4\lambda^3 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(4\lambda^2 - 5) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad 4\lambda^2 - 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

şeklinde reel ve farklı kökler var olup genel çözüm

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$

$y = c_1 + c_2 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + c_3 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$ bulunur.

③ $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+4)^2 = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \mp 2i$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2i$ kompleks katlı kök vardır. Bu durumda genel çözüm ($\alpha = 0$, $\beta = 2$ için)

$y = e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2 x)\cos\beta x + (c_3 + c_4 x)\sin\beta x\}$

$y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin\beta x$ olur.

④ $y^{(5)} - 12y''' + 16y'' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^5 - 12\lambda^3 + 16\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^3 - 12\lambda + 16) = 0$

$\lambda^3 - 12\lambda + 16 = 0$ ın bir kökü $\lambda = 2$ olduğundan

$\lambda^2(\lambda-2)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-2) = 0$ yazılırsa

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = -4$ için genel çözüm

$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^{2x} + c_5 e^{-4x}$ bulunur.

(1)

④ $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$f(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$

$\lambda = -1$ denklemi sağlandığından $(\lambda+1)$ çarpanlardan biridir.

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \lambda + 1 \\ \hline
\mp\lambda^4 \mp \lambda^3 & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \\ \hline
\quad -6\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \\
\quad \pm 6\lambda^3 \pm 6\lambda^2 & \\ \hline
\qquad 12\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \\
\qquad \mp 12\lambda^2 \mp 12\lambda & \\ \hline
\qquad\quad -8\lambda - 8 & \\
\qquad\quad -8\lambda - 8 & \\ \hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = 0$

$(\lambda+1)(\lambda-2)^3 = 0$

$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$

$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = e^{2x}, \; y_3 = xe^{2x}, \; y_4 = x^2 e^{2x}$

lineer bağımsız çözümler olmak üzere genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x}$$

olarak bulunur.

5 $y^{(iv)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$

koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)^3 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ olmak üzere genel çözüm

$y = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)\, e^x$ şeklindedir.

- $y(0) = 0 \rightarrow 0 = c_1 + c_2$

$$y' = e^x(c_2 + c_3 x + c_4 x^2) + e^x(c_3 + 2c_4 x) = e^x\left(c_2 + c_3 + x(c_3 + 2c_4) + c_4 x^2\right)$$

- $y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_2 + c_3$

$$y'' = e^x\left(c_2 + c_3 + x(c_3 + 2c_4) + c_4 x^2\right) + e^x\left(c_3 + 2c_4 + 2c_4 x\right)$$

$$y'' = e^x\{c_2 + 2c_3 + 2c_4 + x(c_3 + 4c_4) + c_4 x^2\}$$

- $y''(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_2 + 2c_3 + 2c_4$

$$y''' = e^x\{c_2 + 2c_3 + 2c_4 + x(c_3 + 4c_4) + c_4 x^2\} + e^x\{c_3 + 4c_4 + 2c_4 x\}$$

$$y''' = e^x\{c_2 + 3c_3 + 6c_4 + x(c_3 + 6c_4) + c_4 x^2\}$$

• $y'''(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_2 + 3c_3 + 6c_4$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 1 \\ c_2 + 3c_3 + 6c_4 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_2 = -c_3 \Rightarrow c_2 = -2 \\ -c_3 + 2c_4 = 1 \\ \underline{2c_3 + 6c_4 = 1} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2c_4 = -1 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{2} \\ c_3 = 2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)e^x$$

$\Rightarrow y = 2 + (-2 + 2x - \frac{1}{2}x^2)e^x$ istenen özel çözüm dur.

⑥ $y''' + y = 0$ denkleminin $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^3 + 1 = 0$ $\lambda = -1$ denklemi sağladığı için $(\lambda+1)$ çarpanlardan biridir Polinom bölmesi yapılırsa diğer çarpan $\lambda^2 - \lambda + 1$ bulunur. O halde

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \quad \text{olur.}$$

$\lambda_1 = -1$ reel kök $\Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = -3 < 0$ olduğundan kompleks kök vardır. $\lambda = \dfrac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ olur.

$$y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left\{c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\} \text{ genel çözümdür.}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left\{c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} + e^{\frac{1}{2}x}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

$$y'' = c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left\{\left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$
$$+ e^{\frac{1}{2}x}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)=0 &\Rightarrow 0 = c_1 + c_2 \\ y'(0)=0 &\Rightarrow 0 = -c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 \\ y''(0)=1 &\Rightarrow 1 = c_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right) \end{aligned}\right\}$$

Buradan c_1, c_2, c_3 bilinmeyenleri çözülürse

$c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olarak bulunur. Buna göre de istenen özel çözüm

$$y = \frac{1}{3}e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left\{-\frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

olarak bulunur.

7 $y^{(4)}+2y'''+6y''+2y'+5y=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri $y_1=\sin x$ olduğuna göre, diğer lineer bağımsız çözümleri ve genel çözümü bulunuz.

$y_1=\sin x$ olduğuna göre $y_2=\cos x$ lineer bağımsız çözüm olup karakteristik denklemin kompleks eşlenik kökleri $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$ şeklindedir. O halde karakteristik denklemin çarpanlarından biri $(\lambda-i)(\lambda+i)=\lambda^2+1$ olur. Polinom bölmesi yapılırsa

$$\ell(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+6\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0 \quad \text{olur.}$$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=2^2-4.1.5=-16 \Rightarrow \lambda_{3,4}=\frac{-2\mp 4i}{2}=-1\mp 2i$$

diğer kompleks eşlenik kökleridir. O halde lineer bağımsız çözümler $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$, $y_3=e^{-x}\sin 2x$, $y_4=e^{-x}\cos 2x$ olmak üzere genel çözüm

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x+e^{-x}\{c_3\sin 2x+c_4\cos 2x\} \quad \text{olur.}$$

8 Onuncu mertebeden $\ell(D)y=0$ denkleminin karakteristik denkleminin kökleri $\{4,4,4,4,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i\}$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

$\lambda = 4$, 4 katlı reel kök

$\lambda = 2 \mp 3i$, 3 katlı kompleks eşlenik kök olduğundan genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)\, e^{4x}$$
$$+ e^{2x}\{(c_5 + c_6 x + c_7 x^2)\cos 3x + (c_8 + c_9 x + c_{10} x^2)\sin 2x\}$$

şeklindedir.