1.5.2. Parametrelerin (Sabitlerin) Değişimi Yöntemi

Sabit katsayılı denklemlerde uygulandığı gibi $Ly=0$ homojen denkleminin $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ çözümü bilindiğinde buradaki c_i sabitlerini değişken olarak kabul ederek sabitin değişimi yöntemi ile $Ly = B(x)$ homojen olmayan denklemin genel çözümü bulunur.

Örnek: $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ denkleminin homojen kısmına ait lineer bağımsız çözümler $y_1 = x$ ve $y_2 = e^x$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

Denklem $Ly = B(x)$ formunda düzenlenirse

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1 \quad \text{olur.}$$

Homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ den $y_h = c_1 x + c_2 e^x$ şeklindedir. Buradaki sabitleri değişken olarak kabul edersek özel çözüm $y_ö = c_1(x)x + c_2(x)e^x$ şeklinde (veya $y_ö = v_1(x)x + v_2(x)e^x$ formunda) sabitin değişimi ile aranırsa

$$\left.\begin{aligned} c_1' x + c_2' e^x &= 0 \\ c_1' 1 + c_2' e^x &= x-1 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümünden

$c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = \int -1\,dx \Rightarrow c_1(x) = -x$ olur.

$c_2' = x e^{-x} \Rightarrow c_2(x) = \int x e^{-x} dx \Rightarrow c_2(x) = -e^{-x}(x+1)$ olur

O halde homojen olmayan kısmın özel çözümü

$y_ö = c_1(x).x + c_2(x).e^x = -x.x - e^{-x}(x+1)e^x$

$\Rightarrow y_ö = -x^2 - x - 1$ olur.

Verilen denklemin genel çözümü $y = y_h + y_ö$ den

$$y = c_1 x + c_2 e^x - x^2 - x - 1$$

olarak bulunur.

(*) Eğer $c_i(x)$ ler belirlenirken alınan integralde integral sabitleri de eklenirse yani

$$c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + C_1$$

$$c_2' = x e^{-x} \Rightarrow c_2(x) = -e^{-x}(x+1) + C_2$$

olarak alınırsa verilen denklemin genel çözümü

$$y = x \cdot c_1(x) + e^x c_2(x)$$

$$= x(-x + C_1) + e^x\left(-e^{-x}(x+1) + C_2\right)$$

$$= C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1$$

şeklinde de bulunabilir.

1.6.3 Sabit Katsayılı Hale Dönüştürülebilen Denklemler

Tanım 3 Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x) \quad \text{--- (19)}$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlere **Cauchy-Euler denklemi** denir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabitlerdir. Bu denklemler bir bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür.

Teorem 18: (19) ile verilen Cauchy-Euler denklemi, $x>0$, $x=e^t$ (veya $t=\ln x$) değişken değişimi ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.

İspat: $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ dönüşümü ile x'e göre olan türevleri t'ye göre türevler cinsinden ifade edelim:

Türev değişkenini karıştırmamak için

$$D_x = \frac{d}{dx}, \quad D_t = \frac{d}{dt}$$

gösterimlerini kullanalım. Buna göre $t = \ln x,\ x > 0$ için

- $y' = D_x y = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = D_t y \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow x y' = x D_x y = D_t y$

- $y'' = D_x^2 y = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}\right)$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \underbrace{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}_{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d^2t}{dx^2}}_{-\frac{1}{x^2}} = D_t^2 y \cdot \frac{1}{x^2} - D_t y \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} D_t (D_t - 1) y$$

$$\Rightarrow x^2 y'' = x^2 D_x^2 y = D_t (D_t - 1) y \quad \text{olur.}$$

$$\bullet\, y''' = D_x^3 y = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(D_t^3 y - 3D_t^2 y + 2D_t y\right)$$

$$\Rightarrow x^3 y''' = x^3 D_x^3 y = \left(D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t\right) y = (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Genel olarak

$$y^{(n)} = D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left(D_t - (n-1)\right)\left(D_t - (n-2)\right) \cdots (D_t - 1) D_t y$$

olmak üzere

$$x^n y^{(n)} = x^n D_x^n y = (D_t - n + 1)(D_t - n + 2) \cdots (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Bu ifadeler (19) da yerine yazılırsa

$$\left(a_0 D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - n + 1) + a_1 D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - n) + \cdots + a_{n-1} D_t + a_n\right) y = b(\ln t)$$

sabit katsayılı lineer denklemi elde edilir.

Not: $(-\infty, 0)$ aralığındaki çözümü bulmak için $-x = e^t$ dönüşümü yapılır.

Örnek: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemidir.

$x = e^t$, $x > 0$ için $t = \ln x$

$xy' = D_t y$, $x^2y'' = D_t(D_t - 1)y$ olacağından verilen denklem

$$(D_t(D_t - 1) - 2D_t + 2)\,y = (e^t)^3$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - D_t - 2D_t + 2)\,y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - 3D_t + 2)\,y = e^{3t} \quad \{\, y'' - 3y' + 2y = e^{3t},\ y = y(t) \,\}$$

şeklinde sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bunun çözümü için

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \text{ den}$$

$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ homojenin çözümüdür. Özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{D_t^2 - 3D_t + 2} e^{3t} = \frac{1}{3^2 - 3.3 + 2} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t}$$ bulunur.

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$ olup $t = \ln x$ için

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3$$ olarak bulunur.

Örnek: $x^2y''' + 5xy'' + 3y' = x\ln x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem bu hali ile Cauchy-Euler denklemi değildir. Denklemin her iki yanı x ile çarpılırsa

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 3xy' = x^2\ln x$$

olup Cauchy-Euler denklemi elde edilir.

$x = e^t$, $x > 0$ dönüşümü ile

$$xy' = D_t y$$

$$x^2y'' = D_t(D_t-1)y$$

$$x^3y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

olup bunlar denklemde yerine yazılırsa

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + 5D_t(D_t-1) + 3D_t\right)y = e^{2t}\cdot t$$

$$(D_t^3 + 2D_t^2)y = te^{2t}$$

sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümü:

$$\ell(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=-2$$

için $y_h = c_1+c_2 t + c_3 e^{-2t}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D_t^3+2D_t^2}\, te^{2t} = e^{2t}\frac{1}{(D_t+2)^3+2(D_t+2)^2}\, t$$

$$= e^{2t}\frac{1}{D_t^3+8D_t^2+20D_t+16}\, t = \frac{e^{2t}}{16}\left\{1-\frac{\cancel{D_t^3}+\cancel{8D_t^2}+20D_t}{16}+\cdots\right\} t$$

$$16\left\{1+\frac{D_t^3+8D_t^2+20D_t}{16}\right\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{20}{16}\right\} = \frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{5}{4}\right\}$$

olarak bulunur. Buna göre genel çözüm

$$y=y_h+y_ö = c_1+c_2t+c_3e^{-2t}+\frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{5}{4}\right\}$$

$x=e^t,\ t=\ln x$ için $\quad y=c_1+c_2\ln x+c_3 x^{-2}+\frac{x^2}{16}\left\{\ln x-\frac{5}{4}\right\}$

şeklindedir.

Tanım 3: Her bir terimi $(bx+c)^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı olan

$$a_0 (bx+c)^n y^{(n)} + a_1 (bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (bx+c) y' + a_n y = b(x) \qquad (20)$$

tipindeki n. mertebeden denklemlere **Legendre denklemi** denir. Bu denklem $bx+c=u$ dönüşümü ile Cauchy-Euler denklemine dönüşür.

Teorem 19: (20) Legendre denklemi $bx+c=e^t$ dönüşümü ile y bağımlı ve t bağımsız değişkenli sabit katsayılı bir denkleme indirgenecek gözükür.

İspat: $bx+c=e^t \Rightarrow t=\ln(bx+c)$

- $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = D_t y \cdot \dfrac{b}{bx+c} \Rightarrow (bx+c)y' = b D_t y$

- $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{b^2}{(bx+c)^2}(D_t^2 - D_t)y \Rightarrow (bx+c)^2 y'' = b^2 D_t (D_t - 1) y$

$\vdots$

- $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{b^n}{(bx+c)^n}(D_t - n+1)(D_t - n+2)\dots(D_t-1)D_t y$

$\Rightarrow (bx+c)^n y^{(n)} = b^n D_t (D_t - 1)\dots(D_t - n+1) y$ olup buradan

$$\Big(a_0 b^n D_t(D_t-1)\cdots(D_t-n+1) + a_1 b^{n-1} D_t(D_t-1)\cdots(D_t-n+2) + \cdots + a_{n-2} b^2 D_t(D_t-1)$$
$$+ a_{n-1} b D_t + a_n\Big) y = b(t)$$

sabit katsayılı denklem elde edilerek çözümü bulunabilir.

Ömek: $(x+2)^3 y''' + (x+2)^2 y'' + (x+2) y' = (x+2)$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklem Legendre denklemi olup $x+2 = e^t$ dönüşümü yapılırsa

$$(x+2) y' = D_t y$$
$$(x+2)^2 y'' = D_t(D_t-1) y$$
$$(x+2)^3 y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2) y$$

olup bunların denklemde yerlerine yazılmasıyla

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + D_t(D_t-1) + D_t\right)y = e^t$$

$$\Rightarrow (D_t^3 - 2D_t^2 + 2D_t)y = e^t$$

sabit katsayılı denklem elde edilir.

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1+i, \ \lambda_3 = 1-i$$

için $y_h = c_1 + e^t\{c_2\cos t + c_3 \sin t\}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D_t^3 - 2D_t^2 + 2D_t} e^t = \frac{1}{1^3 - 2.1^2 + 2.1} e^t = e^t \quad \text{olur.}$$

Genel çözüm

$$y = y_h + y_ö = c_1 + e^t\{c_2\cos t + c_3 \sin t\} + e^t$$

$$= c_1 + (x+2)\{c_2 \cos(\ln|x+2|) + c_3 \sin(\ln|x+2|)\} + x + 2$$

olarak bulunur.