2. Birinci Mertebe ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $F(x,y,y')=0$ formunda yazılıyordu. Bu tip denklemlerin yalnız birinci dereceden donlarının

$f(x,y,c)=0 \Rightarrow$ kapalı formda

veya $y=\phi(x,c) \Rightarrow$ açık formda

genel çözümlerini elde etme yöntemleri verilecektir.

Bu tip denklemler

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \text{veya} \quad \frac{dx}{dy}=h(x,y) \Rightarrow \text{türev formunda}$$

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Rightarrow \text{diferansiyel formda}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

① Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$y' = f(x,y)$ şeklindeki diferansiyel denklem

$$h_1(x)g_1(y)dx + h_2(x)g_2(y)dy = 0$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

olarak yazılabiliyorsa böyle bir denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem denir.

Bu denklemin çözümü

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$ yazılıp integral alınırsa

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c \Rightarrow G(y) + H(x) = c$$

olarak bulunur.

➔ Her integral için ayrı sabit almaya gerek yoktur.

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $y' = \dfrac{y-1}{1-2x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$y' = \dfrac{1}{1-2x} \cdot (y-1)$ olup $y' = h(x)\, g(y)$ şeklinde bir değişkenlerine ayrılabilen denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-2x}(y-1)$$

$$\underbrace{\frac{dy}{y-1}}_{\text{sadece } y \text{ ye bağlı}} = \underbrace{\frac{dx}{1-2x}}_{\text{sadece } x \text{ e bağlı}}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa $\displaystyle\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{1-2x}$

$$\Rightarrow \ln|y-1| = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + \ln|c|$$

$(*)$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$

$$\Rightarrow (y-1)\sqrt{1-2x} = c$$

genel çözümü bulunur.

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ olup değişkenlerine ayrılabilen dif denk.tir.

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int y^{-1/2}\,dy = \int x^{-1/2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-1/2+1}}{1/2} = \frac{x^{-1/2+1}}{1/2} + c$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$$ genel çözümü bulunur.

$\sqrt{y} - \sqrt{x} = c_1$, $c_1 = \frac{c}{2}$ olarak da yazılabilir.

Örnek! $(xy^2 - 2y^2)\,dx + (x^2y - 2x^2)\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemi düzenlersek

$y^2(x-2)\,dx + x^2(y-2)\,dy = 0$ olur. Her iki taraf $\dfrac{1}{x^2y^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{x-2}{x^2}\,dx + \frac{y-2}{y^2}\,dy = 0$$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilen dif denk elde edilir.

$$\int \left(\frac{x-2}{x^2}\right) dx = \int \frac{2-y}{y^2}\,dy$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \frac{2}{x} = -\frac{2}{y} - \ln|y| + C$$ genel çözümü bulunur.

Örnek: $xe^{x^2-y^2}dx + ydy = 0$, $y(0)=0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$xe^{x^2-y^2}dx + ydy = 0$$

$$e^{y^2} / \quad xe^{x^2}e^{-y^2}dx + ydy = 0$$

$$xe^{x^2}dx + ye^{y^2}dy = 0$$

$$\int xe^{x^2}dx + \int ye^{y^2}dy = \int d(c)$$

$$\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{y^2} = c$$

$$e^{x^2} + e^{y^2} = 2c$$ genel çözümdür.

$y(0)=0$ koşulu için $x=0$ için $y=0 \Rightarrow e^0 + e^0 = 2c$

$$\Rightarrow 2 = 2c$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow e^{x^2} + e^{y^2} = 2$$ istenen özel çözüm

CS Scanned with CamScanner

Örnek! $y' \sin y = \sin^2 x$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} \sin y = \sin^2 x$$

$$\sin y \, dy = \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$-\cos y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$\sin 2x - 4 \cos y = 2x + c$ genel çözümdür.

$$\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Örnek! $y' + 2xy = -xy^2$ denklemini çözünüz

$$\frac{dy}{dx} = -x(y^2+2y)$$

$$\frac{dy}{y^2+2y} = -x\,dx$$ değişkenlerine ayrılabilen denklem

$$\int \frac{dy}{y^2+2y} = \int -x\,dx$$

$$\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+2}\right) dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = -x^2 + c$$

$$\underbrace{y = c(y+2)e^{-x^2}}_{\text{genel çözüm}}$$

CS Scanned with CamScanner

② Homojen Diferansiyel Denklemler

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunda x yerine xt, y yerine yt konulduğunda

$$f(xt,yt) = t^n f(x,t) \quad , \; n \in \mathbb{R}$$

oluyorsa fonksiyona **n. dereceden homojendir** denir.

Not: f, $\frac{y}{x}$ in veya $\frac{x}{y}$ nin bir fonksiyonu ise $f\left(\frac{yt}{xt}\right) = t^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$

veya $f\left(\frac{xt}{yt}\right) = t^0 f\left(\frac{x}{t}\right)$ olacağından fonksiyon **sıfırıncı dereceden homojendir.**

Örnek: $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ için

$$f(xt,yt) = \sqrt{(xt)^3+(yt)^3} = \sqrt{t^3(x^3+y^3)} = t^{3/2}\sqrt{x^3+y^3} = t^{3/2} f(x,y)$$

$\Longrightarrow$ fonksiyon $3/2$. dereceden homojendir.

CS Scanned with CamScanner

Örnek! $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} + \tan\frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right)$ için

$$f(xt, yt) = \frac{(xt)^2}{(yt)^2} + \tan\frac{xt}{yt} + \ln\left(\frac{2xt}{yt} + 1\right)$$

$$= \frac{x^2}{y^2} + \tan\frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right)$$

$$= f(x,y)$$

$\Rightarrow$ fonksiyon sıfırıncı dereceden homojendir.

Not: Homojen fonksiyonlarda her terimin toplam derecesi aynı olmalıdır.

- $f(x,y) = \underbrace{6xy^3}_{\text{derece } 4} - \underbrace{x^2y^2}_{\text{derece } 4}$ $\Rightarrow$ fonksiyon 4. dereceden homojen

Gerçekten

$$f(xt, yt) = 6(xt)(yt)^3 - (xt)^2(yt)^2$$
$$= 6\,x y^3 t^4 - x^2y^2t^4$$
$$= t^4\left[6xy^3 - x^2y^2\right]$$
$$= t^4 f(x,y)$$

- $f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\text{derece } 2} - \underbrace{y}_{\text{derece } 1}$ $\Rightarrow$ dereceleri farklı olduğundan homojen değildir.

Tanım: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarının her ikisi de aynı dereceden homojen ise veya

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

denklemi için $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen ise diferansiyel denkleme homojendir denir.

Örnek: $(\underbrace{x^2}_{2} - 3\underbrace{y^2}_{2})dx + 2\underbrace{xy}_{\underbrace{1+1}_{2.\text{derece}}}dy = 0$

2. derece

aynı dereceden olduğu için denklem homojendir.

veya

$$(x^2-3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$ için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

$$f(x,y) = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$$ olmak üzere

$$f(xt,yt) = \frac{3(yt)^2-(xt)^2}{2xtyt} = \frac{\cancel{t^2}(3y^2-x^2)}{\cancel{t^2}(2xy)}$$

$$= \frac{3y^2-x^2}{2xy} = f(x,y)$$

olup $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen olacağından denklem homojen denklemdir

Teorem: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ denklemi homojen ise $y = ux$ veya $x = uy$ değişken değişimi ile değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denkleme dönüşür. Burada u ve v yeni bağımlı değişkenlerdir. ($u = u(x)$, $v = v(x)$ şeklinde)

İspat: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ homojen ise $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ formunda veya $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right)$ formunda yazılabilir.

$y = ux$ için $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ olup denklemde yazılırsa

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{u - g(u)}$$ değişkenlerine

ayrılabilen denklem elde edilir.

Scanned with CamScanner

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u-g(u)}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = F(u) + C$$

şeklinde olup $u = \frac{y}{x}$ yazılırsa genel çözüm

$$\ln|x| = F\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $x = vy$ değişken dönüşümü ile de denklemin değişkenlere ayrılabilir denkleme indirgendiği gösterilir.

Denklemdeki $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları

$\frac{y}{x}$ ye bağlı ise $y = ux$
$\frac{x}{y}$ ye bağlı ise $x = vy$
dönüşümü yapmak daha uygundur.

Scanned with CamScanner

Örnek! $y' = \frac{x-y}{x+y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$y' = \frac{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)} \rightarrow y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$ olup $\frac{y}{x}$ formunda

olduğundan denklem homojendir.

$y = ux$ dersek $y' = u'x + u$ olur.

$$u'x + u = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow u'x = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \frac{dx}{x}$$ değişkenlerine ayrılabilir denk

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2(1+u)}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2| = \ln|x| + \ln c$$

$$(1-2u-u^2)^{-1/2} = cx$$

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yazılırsa

$\left(1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/2} = cx$ genel çözümdür.

Örnek! $\underbrace{xy}_{2.\text{derece}}\,dx - (\underbrace{x^2+y^2}_{2.\text{ derece}})\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

dx ve dy nin katsayıları aynı dereceden olduğundan denklem homojendir veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ olup homojendir

$y = ux$ dersek $y' = u'x + u$ dur.

$$u'x + u = \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow u'x = \frac{u}{1+u^2} - u$$

$$\Rightarrow u'x = -\frac{u^3}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u^2}{u^3}\,du = -\frac{dx}{x}$$ değişkenlerine ayrılabilen denklem

Scanned with CamScanner

$$\int \frac{1+u^2}{u^3}\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u}\right) du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} + \ln|u| = -\ln|x| + c$$

$$\ln|ux| = \frac{1}{2u^2} + c$$

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yerine yazılırsa

$$\ln\left|\frac{y}{x}x\right| = \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} + c$$

$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$ genel çözümü bulunur.

Örnek! $(1+2e^{x/y})\,dx + 2e^{x/y}(1-xy^{-1})\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Denklem $\frac{x}{y}$ formunda olduğundan $x = vy$ dönüşümü yapalım.

$x = vy \Rightarrow \quad x' = v'y + v$ olur. (x bağımlı, y bağımsız $x = x(y)$ şeklinde)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(xy^{-1}-1)\,2e^{x/y}}{1+2e^{x/y}}$$

$$v'y + v = \frac{(v-1)\,2e^{v}}{1+2e^{v}}$$

$$v'y = -\frac{v+2e^{v}}{1+2e^{v}}$$

$$\frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}\,dv = -\frac{dy}{y}$$ değişkenlerine ayrılabilir denklem

Scanned with CamScanner

$$\int \frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}\,dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|v+2e^{v}| = -\ln|y| + \ln c$$

$$y(v+2e^{v}) = c$$ dur.

$$x = vy \Rightarrow v = \frac{x}{y}$$ yazılırsa

$$y\left(\frac{x}{y} + 2e^{\frac{x}{y}}\right) = c$$ genel çözümü bulunur.

(4) Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım: u, bir D bölgesinde birinci kısmi türevleri sürekli, iki reel değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $\forall (x,y) \in D$ için

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

ifadesine $u = u(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli denir.

Örnek: $u = x^2 + 8x^2 y - 10y^3$ fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$du = (2x + 16xy)dx + (8x^2 - 30y^2)dy$$

dır.

Not: $f(x,y) = c$ eğriler ailesinin tam diferansiyeli

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Scanned with CamScanner

bu aynı zamanda eğri ailesinin diferansiyel denklemidir.

Tanım: Eğer $\forall (x,y) \in D$ için

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad \text{---}(2.1)$$

ifadesi $du(x,y)$ tam diferansiyeline eşit olacak şekilde iki reel değişkenli bir u fonksiyonu varsa bu ifadeye D bölgesinde bir tam diferansiyel denir. Yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu varsa (2.1) ifadesi bir tam diferansiyeldir. Eğer

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

denkleminin sol tarafı bir tam diferansiyel ise denkleme **tam diferansiyel denklem** denir.

Örnek:
- $(2x+16xy)\,dx + (8x^2 - 30y^2)\,dy = 0$ tam diferansiyel denklemdir, çünkü $du = d(x^2 + 8x^2y - 10y^3) = (2x+16xy)\,dx + (8x^2-30y^2)\,dy$ dir.
- $y\,dx + 2x\,dy = 0$ tam diferansiyel denklem değildir, çünkü $y\,dx + 2x\,dy$ hiçbir fonksiyonun tam diferansiyeli değildir.

Scanned with CamScanner

Teorem: M ve N, dikdörtgensel bir D bölgesinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \ldots (2.2)$$

diferansiyel denkleminin D de tam olması için gerek ve yeter koşul her $(x,y) \in D$ için

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \left(M_y = N_x \right) \quad \ldots (2.3)$$

olmasıdır.

İspat: Önce (2.2) denkleminin tam olduğunu varsayalım. Bu takdirde $Mdx + Ndy$ D de tam diferansiyeldir. Yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu vardır. Buradan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

yazılabilir. M ve N nin birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan u'nun ikinci mertebeden kısmi türevleri de süreklidir ve

CS Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{olup} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

elde edilir. Bu teoremin birinci kısmını ispat eder.

Şimdi her $(x,y) \in D$ için (2.3) koşulunun sağlandığını varsayalım. (2.2) denkleminin D de tam olduğunu ispat etmek için

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{---} (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \text{---} (2.5)$$

eşitliklerini sağlayan bir u fonksiyonunun varlığını göstermek gerekir. Bunun için (2.4) ifadesinin x e göre kısmi integralini, yani y yi sabit tutup x e göre integralini alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y) \quad \text{---} (2.6)$$

Scanned with CamScanner

elde edilir. Burada h(y) integrasyon sabitidir ve bunu belirlemek için (2.6) nın y ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{dh}{dy}$$

olur. Buradan $\dfrac{dh}{dy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ yazılabilir. (2.5)

kullanılırsa

$$\frac{dh}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \quad \ldots (2.7)$$

elde edilir. (2.7) nin ikinci tarafı x e bağlı değildir. Gerçekten (2.3) dikkate alınarak

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

olduğu görülür. Böylece (2.7) den integral alınarak

CS Scanned with CamScanner

$$h(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right) dy + c_1$$

bulunur ve bu değer (2.6) da yerine yazılırsa

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right) dy + c_1$$

elde edilir. Bu teoremin ikinci kısmını ispat eder.

Not: u fonksiyonunun elde edilmesi için (2.5) denkleminden de başlayabiliriz. Bu durumda önce y ye göre kısmi integral alınır ve

$$u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x)$$

elde edilir. Sonra x e göre türev alınır

$$h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\,dy$$

elde edilir. Bu ifade y den bağımsız olduğundan x e göre integral alınarak h(x) bulunur ve u(x,y) de yerine yazılır.

Scanned with CamScanner

Teorem: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel olsun. Yani $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ eşitliklerini sağlayan bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Bu durumda denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = c \quad , \ c \text{ keyfi sabit}$$

şeklindedir.

İspat: Denklem tam diferansiyel olduğundan

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$= M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow du(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = c$$

elde edilir.

Örnek: $(2x+16xy)dx + (8x^2 - 30y^2)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 2x+16xy \\ N(x,y) = 8x^2 - 30y^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} M_y = 16x \\ N_x = 16x \end{array}\right\} \quad M_y = N_x \text{ olduğundan}$$

verilen denklem tam diferansiyeldir. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+16xy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2 - 30y^2$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. $u(x,y) = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+16xy \quad \text{eşitliğini kullanırsak}$$

$$u(x,y) = \int (2x+16xy)dx + h(y) = x^2 + 8x^2y + h(y)$$

bulunur. Şimdi bunun y ye göre türevini alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2 + h'(y)$$

olur. $\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{8x^2} - 30y^2 = \cancel{8x^2} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = -30y^2$

$$\Rightarrow h(y) = -10y^3 + c_1$$

bulunur.

CS Scanned with CamScanner

O halde $u(x,y) = x^2 + 8x^2y - 10y^3 + c_1$ olur. Genel çözüm

$$u(x,y) = c_2$$

olduğundan istenen genel çözüm

$$x^2 + 8x^2y - 10y^3 + c_1 = c_2 \qquad (c_2 - c_1 = c)$$

$$x^2 + 8x^2y - 10y^3 = c$$

olarak elde edilir.

➡ İki sabitin farkı yine bir sabit olacağından h fonksiyonu bulunurken integral sabiti alınmayabilir.

Eğer $\frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2 - 30y^2$ eşitliği ile başlarsak buradan

$$u(x,y) = \int (8x^2 - 30y^2)\, dy + h(x) = 8x^2y - 10y^3 + h(x)$$

olur. Şimdi bunun x e göre türevini alırsak

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{16xy} + h'(x) = 2x + \cancel{16xy}$$ olur.

$$\Rightarrow \quad h'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = \int 2x\,dx = x^2$$ bulunur.

$u(x,y) = 8x^2y - 10y^3 + h(x) = 8x^2y - 10y^3 + x^2$ olup genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$$8x^2y - 10y^3 + x^2 = c$$

çözümü elde edilir.

➡ $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ eşitliklerinin kullanım sırasının önemi yoktur. Hangisinden başlanırsa başlanılsın sonuçta aynı $u(x,y) = c$ genel çözümü bulunur.

Scanned with CamScanner

Örnek: $(e^x+y)dx+(\cos y+x+1)dy=0$, $y(0)=0$ probleminin çözümünü bulunuz.

Denklem şu ana kadar gördüğümüz denklem tiplerinden değildir. Tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edersek;

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= e^x+y \\ N(x,y) &= \cos y+x+1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} M_y &= 1 \\ N_x &= 1 \end{aligned}\right\} M_y = N_x \text{ olduğundan}$$

denklem tam diferansiyeldir. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x+y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y+x+1$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır bunu bulalım;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x+y \Rightarrow u(x,y) = \int (e^x+y)dx + h(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^x + yx + h(y)$$ olur. Buradan

y ye göre türev alıp $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y + x + 1$ eşitliğini kullanırsak

$$\cancel{x} + h'(y) = \cos y + \cancel{x} + 1 \Rightarrow h'(y) = \cos y + 1$$

$$\Rightarrow h(y) = \int (\cos y + 1)dy$$

$$\Rightarrow h(y) = \sin y + y$$

bulunur.

Scanned with CamScanner

O halde genel çözüm $u(x,y)=c$ olduğundan

$$e^x + yx + \sin y + y = c$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

$y(0)=0$ koşulunu sağlayan çözüm

$e^0 + 0.0 + \sin 0 + 0 = c \Rightarrow c = 1$ olup

$$e^x + yx + \sin y + y = 1$$

istenen özel çözümdür.

Not: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tam diferensiyel denklemin $y(x_0)=y_0$ koşulunu sağlayan çözümü

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,z)\,dz = 0$$

veya

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x,z)\,dz = 0$$

eşitliği ile de bulunabilir.

Scanned with CamScanner

$(e^x+y)\,dx + (\cos y + x + 1)\,dy = 0$, $y(0)=0$ probleminin çözümü

$e^x + xy + \sin y + y = 1$ olarak bulunmuştu. Gerçekten $x_0=0$, $y_0=0$ için

$N(x_0,z) = N(0,z) = \cos z + 1$

$\rightarrow \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_0^x (e^t+y)\,dt + \int_0^y (\cos z + 1)\,dz = 0$

$\Rightarrow (e^t + yt)\Big|_0^x + (\sin z + z)\Big|_0^y = 0$

$\Rightarrow e^x + xy - 1 + \sin y + y = 0$

$\Rightarrow e^x + xy + \sin y + y = 1$ bulunur.

Diğer eşitlik kullanılsaydı $M(t,y_0) = M(t,0) = e^t$

$\rightarrow \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x,z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_0^x e^t\,dt + \int_0^y (\cos z + x + 1)\,dz = 0$

$\Rightarrow e^t\Big|_0^x + (\sin z + xz + z)\Big|_0^y = 0$

$\Rightarrow e^x - 1 + \sin y + xy + y = 0$

$\Rightarrow e^x + xy + \sin y + y = 1$ bulunur.

Not: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tam diferansiyel denklem ise denklemin terimleri belli tam diferansiyellerin toplamı olacak şekilde gruplara ayrılıp integre edilerek genel çözüm bulunabilir. Yani

$$du_1(x,y) + du_2(x,y) + \dots + du_n(x,y) = 0$$

yazılıp buradan integral alınırsa çözüm

$$u_1(x,y) + u_2(x,y) + \dots + u_n(x,y) = 0$$

olarak kolaylıkla bulunur.

Sıklıkla Karşılaşılan Diferansiyeller

- $d(x+y) = dx + dy$
- $d(x-y) = dx - dy$
- $d(x^2+y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy$
- $d(xy) = y\,dx + x\,dy$
- $d(y/x) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$
- $d(x/y) = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
- $d(\ln(x+y)) = \dfrac{dx+dy}{x+y}$
- $d(\ln(x-y)) = \dfrac{dx-dy}{x-y}$
- $d(\ln(xy)) = \dfrac{y\,dx + x\,dy}{xy}$
- $d(\sqrt{x^2+y^2}) = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $d(\arctan \frac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

CS Scanned with CamScanner

Örnek: $(3x^2y+2xy)dx + (x^3+x^2+2y)dy = 0$ tam diferansiyel denklemi için

$$(3x^2y\,dx + x^3dy) + (2xy\,dx + x^2dy) + 2y\,dy = 0$$

$$d(x^3y) + d(x^2y) + d(y^2) = d(c)$$

$$\int d(x^3y) + \int d(x^2y) + \int d(y^2) = \int d(c)$$

$$x^3y + x^2y + y^2 = c$$

genel çözümü bulunur.

Örnek: $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$, $y(2) = 1$ probleminin çözümünü bulunuz

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(c)$$

$\frac{x}{y} = c \Rightarrow x = cy$ genel çözümdür.

$y(2) = 1$ için $2 = c.1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow x = 2y$ istenen özel çözümdür.

Scanned with CamScanner

Örnek: $M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + x^{-1})\,dy = 0$ denkleminin tam olabilmesi için $M(x,y)$ ne olmalıdır?

Denklem tam diferansiyel ise $M_y = N_x$ olmalıdır.

$N_x = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$ için

$M_y = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow M(x,y) = \int \left(e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2} \right) dy + g(x)$

$\Rightarrow M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$ olmalıdır.