3. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

3.1. Lineer Denklemler ve Çözümleri

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenli bir lineer denklemi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

olarak anlıyoruz. Burada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ -lere katsayılar ve b-ye denklemin sabiti adı verilir. Yukarıdaki lineer denklemin bir çözümü

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 \\ x_2 &= k_2 \\ &\vdots \\ x_n &= k_n \end{aligned} \qquad \text{veya} \qquad u = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

n-lisine denir.

Bu çözümlerin kümesine <u>Çözüm Kümesi</u> veya <u>Genel Çözüm</u> denir.

<u>Örnek:</u>

$3x - y + xz = 4 \longrightarrow$ Lineer değildir.

$x^2 + y + z = 5 \longrightarrow$ Lineer değildir

$x - z + y + t = 7 \longrightarrow$ Lineerdir.

<u>Tanım:</u> Eğer bir denklem

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

olacak şekilde verilmişse bu denkleme <u>Bozulmuş</u> denir.

Böyle bir denklemin çözümü aşağıdaki teoremle verilir:

<u>Teorem:</u> $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ lineer bozulmuş denklemde

(i) Eğer $b \neq 0$ ise o zaman denklem bir çözüme sahip değildir.

(ii) Eğer $b=0$ ise, o zaman her $u=(k_1, k_2, \dots, k_n)$ n-lisi (ileride vektör adını vereceğiz) bir çözümdür.

Örnek: $3y + x + 5 - y = 2x + 1 - x + 2y + 4$

denkleminin çözümünü belirleyiniz.

$$2y + x + 5 = x + 5 + 2y$$

veya

$$2y + x - x - 2y = 5 - 5$$

veya

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

lineer bozulmuş denklem elde edilir. Yukarıdaki teoreme göre $b=0$ olduğundan her $u=(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ çözümdür.

Tanım: Eğer bir denklem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

olacak şekilde verilir ve en az bir $a_i \neq 0$ ise bu denkleme Bozulmamış denir. Bir lineer bozulmamış denklemde katsayısı sıfır olmayan ilk bileşene Baş Bilinmeyen adı verilir.

Örnek: $6y + z = 7$ lineer bozulmamış denklemini ele alalım. Burada $6 \neq 0$ olduğundan y baş bilinmeyendir. Baş bilinmeyenin yerine p dersek;

eğer bilinmeyenler x, y ve z ise $p=2$

eğer bilinmeyenler sadece y ve z ise $p=1$

dır.

Teorem: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ baş bilinmeyeni x_p olan bir lineer bozulmamış denklem olsun.

(i) $j \neq p$ olmak üzere x_j bilinmeyenlerinin değerlerinin herhangi kümesi denklemin tek çözümünü verir, burada x_j bilinmeyenlerine bağımsız değişkenler denir.

(ii) Denklemin her çözümü (i) nin içinde bulunabilir

Örnek: $x - 2y + 3z = 11$ lineer denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x \rightarrow$ Baş bilinmeyen

y, z $\rightarrow$ Bağımsız değişken

* $y = 0$ ve $z = 3$ için

$$x - 2.0 + 3.3 = 11 \quad \text{veya} \quad x + 9 = 11 \quad \text{veya} \quad x = 2$$

bulunur. Böylece sistemin tek bir çözümü (y ve z-ye göre)

$$u_1 = (2, 0, 3) \text{ dır.}$$

* $y = -2$ ve $z = \frac{11}{3}$ için

$$x - 2.(-2) + 3.\frac{11}{3} = 11 \quad \text{veya} \quad x + 15 = 11 \quad \text{veya} \quad x = -4$$

bulunur. Böylece, sistemin bir çözümü

$$u_2 = (-4, -2, 11/3) \text{ dır.}$$

Şimdi sistemin genel çözümünü bulmak için bağımsız değişkenlere parametreler atayalım, yani

$$y = a$$
$$z = b$$

diyelim. O zaman

$$x - 2a + 3b = 11 \quad \text{veya} \quad x = 11 + 2a - 3b$$

bulunur. Böylece sistemin genel çözümü

$$U = (11 + 2a - 3b,\ a,\ b)$$

şeklindedir.

1.2. Lineer Denklem Sistemleri

<u>Tanım:</u> m-tane lineer denklemden ve n-tane bilinmeyenden oluşan

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

sisteme <u>Lineer Denklem Sistemi</u> denir. Burada $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için a_{ij}-ler x_j bilinmeyenlerinin katsayıları ve b_i-ler sistemin sabitidir.

Daha kullanışlı olan bir başka tanımı aşağıdaki gibi verelim:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad \text{olmak üzere}$$

$AX=B$ matris denklemine Lineer Denklem Sistemi denir. Burada, A matrisine Katsayılar Matrisi ve $[A \mid B]$ bölüntülü matrisine de sistemin Genişletilmiş Katsayılar Matrisi adı verilir.

$AX=B$ sistemini sağlayan $n\times 1$ tipindeki X matrisine sistemin bir Çözümü denir. Sistem en azından bir çözüme sahip ise Çözümlü (ya da Tutarlı) Sistem, değilse Çözümsüz (ya da) Tutarsız Sistem denir.

Homojen Denklem Sistemleri

Tanım: $AX=B$ lineer denklem sisteminde eğer

$$B=0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ise, o zaman $AX=0$ lineer denklem sistemine Homojen Denklem Sistemi denir.

Böyle bir sistemin daima Aşikar Çözüm adı verilen bir çözümü mevcuttur. Bu çözüm

$$X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad X=(0,0,\ldots,0)$$

şeklindedir.

Homojen denklem sistemlerinde mühim olan

$$X \neq (0, 0, ..., 0)$$

çözümlerini tespit etmektir. Bu çözümlere Aşikar Olmayan Çözüm denir.

→ Homojen sistemin çözümlerinin varlığını tespit etmeye yardımcı aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem: n bilinmeyenli m- tane denklemden oluşan

$$AX = 0$$

sisteminde eğer $\operatorname{rank} A = p$ ise, o zaman sistemin $n-p$ tane parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

Sonuç 1: Eğer $p \leq m \leq n$ ise sistemin aşikar olmayan çözümleri vardır.

Sonuç 2: Eğer $p = n$ ise sistemin aşikar çözümü vardır.

Sonuç 3: Eğer $m = n$ ise sistemin aşikar olmayan çözümleri olması için gerek ve yeter şart $\det A = 0$ olmasıdır.

$\longrightarrow$ Homojen sistemin çözümlerini bulmak için katsayılar matrisine elemanter operasyonlar uygulayarak sistemin yeni katsayılar matrisini

- Üçgen
- Eşelon

formlarından uygun olana indirgemeliyiz. Sonuç olarak başlangıçtaki sistem Üçgensel veya Eşelon biçimli sistem halini alır ki istenilen çözümleri elde ederiz.

Örnek:

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$2x + y - z = 0$$

lineer homojen denklem sisteminin çözümlerini irdeleyelim:

Sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dır. $\operatorname{rank} A = p = 2$ olmak üzere $p = 2 \leq m = 2 \leq n = 3$ olduğu için Sonuç 1-e göre verilen sistemin aşikar olmayan çözümleri vardır ve bu çözümler $n - p = 3 - 2 = 1$ parametreye bağlı sonsuz çözümdür.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix} \underset{\mathcal{E}_3}{\overset{\mathcal{E}_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 7/3 \end{bmatrix} = R$$

elde edilir.

$\mathcal{E}_1 : s_1 \to -2s_1 + s_2$

$\mathcal{E}_2 : s_2 \to -\frac{1}{3} s_2$

$\mathcal{E}_3 : s_2 \to -2s_2 + s_1$

A matrisinden elde edilen eşelon matris R-yi katsayılar matrisi kabul eden sistem

$$x - \frac{5}{3} z = 0$$
$$y + \frac{7}{3} z = 0$$

olur. $z = c$ dersek

$$x = 5/3\,c \quad \text{ve} \quad y = 7/3\,c$$

bulunur. Öyleyse sistemin genel çözümü

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}c \\ \frac{7}{3}c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X = \left(5/3\,c,\ 7/3\,c,\ c \right)$$

elde edilir.

Teorem: $AX = 0$ lineer homojen denklem sisteminde katsayılar matrisi A nın üçgen veya eşelon formu R ise, o zaman

$$AX = 0 \quad \text{ve} \quad RX = 0$$

sistemlerinin çözümleri aynıdır.

Homojen Olmayan Sistemler

Tanım: $AX=B$ lineer denklem sisteminde eğer

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

ise, o zaman $AX=B$ lineer denklem sistemine <u>Homojen Olmayan Denklem Sistemi</u> denir.

⟶ Homojen olmayan sistemin çözümlerini bulmak için genişletilmiş katsayılar matrisine elemanter operasyonlar uygulayarak sistemin yeni katsayılar matrisini

- Üçgen
- Eşelon
- İndirgenmiş eşelon

formlarından uygun olana getirmeliyiz. Bu şekilde elde edilen çözüm için kullanılan yönteme <u>Gauss-Jordan İndirgeme Yöntemi</u> denir.

İndirgenmiş sistemin genel görünümü

$$\begin{aligned}
a_{1j_1}x_{j_1} + \dots \qquad\qquad\qquad &= b_1 \\
a_{2j_2}x_{j_2} + \dots \qquad\quad &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\
a_{rj_r}x_{j_r} + \dots &= b_r \\
0 &= b_{r+1} \\
0 &= 0 \\
&\vdots \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu sisteme bakarak aşağıdaki sonuçları yazabiliriz:

(a) Sistemdeki $b_{r+1} \neq 0$ ise sistemin <u>çözümü yoktur.</u>

(b) Sistemdeki $b_{r+1} = 0$ ise <u>temel bilinmeyenler</u> adı verilen ve katsayıları baş katsayılar olan $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ bilinmeyenlerini bağımsız değişkenler adı verilen diğer bilinmeyenler türünden ifade edebiliriz.

(i) Bilinmeyenlerin hepsi temel bilinmeyense, yani bağımsız değişkenler yoksa sistemin <u>tek çözümü vardır.</u>

(ii) En az bir tane bağımsız değisken varsa temel bilinmeyenler bağımsız değişken cinsinden ifade edilir ve bu durumda sistemin <u>sonsuz çözümü vardır.</u>

Örnek:

$$2x + y - 2z = 10$$
$$3x + 2y + 2z = 1$$
$$5x + 4y + 3z = 4$$

homojen olmayan lineer denklem sisteminin çözümlerini bulalım:

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{B}$$

olmak üzere

$$[A|B] \overset{\varepsilon_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \quad ; \quad \varepsilon_1 : S_1 \rightarrow \frac{1}{2} S_1$$

$$\overset{\varepsilon_2}{\underset{\varepsilon_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 0 & 1/2 & 5 & -14 \\ 0 & 3/2 & 8 & -21 \end{array}\right] \quad ; \quad \begin{array}{l} \varepsilon_2 : S_2 \rightarrow -3S_1 + S_2 \\ \varepsilon_3 : S_3 \rightarrow -5S_1 + S_3 \end{array}$$

$$\overset{\varepsilon_4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3/2 & 8 & -21 \end{array}\right] \quad ; \quad \varepsilon_4 : S_2 \rightarrow 2S_2$$

$$\overset{\varepsilon_5}{\underset{\varepsilon_6}{\sim}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 19 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right]}_{R} \quad ; \quad \begin{array}{l} \varepsilon_5 : S_1 \rightarrow -1/2\, S_2 + S_1 \\ \varepsilon_6 : S_3 \rightarrow -3/2\, S_2 + S_3 \end{array}$$

elde edilir. Öyleyse, verilen sistem

$$\begin{aligned} x - 6z &= 19 \\ y + 10z &= -28 \\ -7z &= 21 \end{aligned}$$

halini alır. Buradan, tüm değişkenler (veya bilinmeyenler) temel bilinmeyen olduğundan sistemin tek bir çözümü vardır. Bu çözüm yerine koyma metoduyla

$$U = (1, 2, -3)$$

bulunur.

Örnek: $x+2y-3z=1$
$$2x+5y-8z=4$$
$$3x+8y-13z=7$$ homojen olmayan lineer denklem sisteminin çözümlerini bulalım:

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{array}\right]$$ olmak üzere

$$[A|B] \underset{\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right]$$; $\varepsilon_1 : s_2 \longrightarrow -2s_1+s_2$
$\varepsilon_2 : s_3 \longrightarrow -3s_1+s_3$

$$\underset{\varepsilon_4}{\overset{\varepsilon_3}{\sim}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{R}$$; $\varepsilon_3 :$
$\varepsilon_4 :$

elde edilir. Öyleyse, verilen sistem

$$x+z=-3$$
$$y-2z=2$$

halini alır. Buradan, $b_{r+1}=b_3=0$ ve z bağımsız değişken olduğundan sistemin 1-parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. Bu çözüm $z=c$ dersek

$$u=(-3-c,\ 2+2c,\ c)$$

bulunur.

ÖDEV:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

homojen olmayan lineer denklem sisteminin çözümlerini araştırınız, eğer varsa çözümlerini bulunuz.

Teorem: $AX = B$ homojen olmayan lineer denklem sisteminde genişletilmiş katsayılar matrisi $[A|B]$ nin üçgen veya eşelon veya indirgenmiş eşelon formu $[R|C]$ ise, o zaman

$$AX = B \quad \text{ve} \quad RX = C$$

sistemlerinin çözümleri aynıdır

KAYNAKLAR

1-Schaum's Outline of Lİnear Algebra, Seymour Lipschutz and Marc Lipson.
2-Doğrusal Cebir, Cemal Koç ve Songül Esin, Matematik Vakfı 1995.
3-Lineer Cebir Prof. Dr. Süleyman Çiftçi, Dora Yayınları 2015.
4-Linear Algebra with Applications, Steven J. Leon, Global Edition.