BÖLÜM 4

4.1. HALKALAR

Tanım 4.1.1. H boştan farklı bir küme, $\oplus$ ve $\odot$, H de iki iç işlem olsun. Aşağıdaki aksiyomlar (özellikler) sağlanırsa $(H,\oplus,\odot)$ cebirsel yapısına **bir halka** denir.

H1) $(H,\oplus)$ bir değişmeli gruptur.

H2) $\odot$ işleminin H de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c\in H$ için $(a\odot b)\odot c = a\odot(b\odot c)$ dir.

H3) $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır. Yani $\forall a,b,c\in H$ için $a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c)$ ve $(a\oplus b)\odot c=(a\odot c)\oplus(b\odot c)$ olur.

Not: Tanımda geçen $\oplus$ sembolü yerine genellikle +, $\odot$ sembolü yerine de genellikle $\cdot$ kullanılacaktır.

Not: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun. H nin + işlemine göre etkisiz elemanına **halkanın sıfır elemanı veya sıfırı** denir ve genellikle 0_H veya sadece 0 ile gösterilir. H nin $\cdot$ işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer $\cdot$ işlemine göre de etkisiz elemanı varsa bu elemana **halkanın birim elemanı veya birimi** denir ve genellikle 1_H veya sadece 1 ile gösterilir, böyle bir halkaya da **bir birimli halka** denir. Halka ikinci işleme göre değişme özelliğine sahipse bu halkaya **bir değişmeli halka** denir.

Not: Gruplarda olduğu gibi halkalarda da iki eleman için tanımlı + ve $\cdot$ işlemleri sonlu sayıda eleman için de tanımlıdır. Bu durumda genel birleşme ve genel dağılma özellikleri de sağlanır. Yani H bir halka olmak üzere $\forall a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m \in H$ için

(a) $1 \le k < n$ olmak üzere $\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ olur.

(b) $1 \le k < n$ olmak üzere $\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} a_i$ olur.

(c) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$ olur.

Teorem 4.1.2. H bir halka olsun. Bu durumda,

(i) $\forall a \in H$ için $a0_H = 0_H a = 0_H$ olur.

(ii) $\forall a, b \in H$ için $a(\text{-}b) = (-a)b = -(ab)$ olur.

(iii) $\forall a, b \in H$ için $(-a)(-b) = ab$ olur.

(iv) H birimli ise $\forall a \in H$ için $(-1_H)a = a(-1_H) = -a$ olur.

(v) H birimli ise $(-1_H)(-1_H) = 1_H$ olur.

İspat: (i) Herhangi $a \in H$ alalım. $0_H + 0_H = 0_H$ olduğundan $a(0_H + 0_H) = a0_H$ olup H bir halka olduğundan $a0_H + a0_H = a(0_H + 0_H) = a0_H$ olur. Bu durumda $a0_H + a0_H + (-(a0_H)) = a0_H + (-(a0_H))$ olup $a0_H + (-(a0_H)) = 0_H$ olduğundan $a0_H + 0_H = 0_H$ ve buradan da $a0_H = 0_H$ elde edilir. Benzer şekilde $0_H a = 0_H$ olduğu gösterilebilir.

(ii) Herhangi $a,b\in H$ alalım. $b+(-b)=-b+b=0_H$ ve H bir halka olduğundan (i) şıkkından $ab+a(-b)=a(b+(-b))=a0_H=0_H$ ve $a(-b)+ab=a(-b+b)=a0_H=0_H$ olup $a(-b)$ elemanı ab elemanının H de + işlemine göre tersi olur. O halde $a(-b)=-(ab)$ olur. Benzer şekilde $(-a)b=-(ab)$ olduğu gösterilebilir.

(iii) H deki bir elemanın + işlemine göre tersinin tersi kendisine eşit olduğundan (ii) şıkkından $\forall a,b\in H$ için $(-a)(-b)=(-(-a))b=ab$ olup istenen elde edilir.

(iv) H birimli olsun. Bu durumda (ii) şıkkından $\forall a\in H$ için $(-1_H)a=-(1_H a)=-a$ ve $a(-1_H)=-(a1_H)=-a$ olup $(-1_H)a=a(-1_H)=-a$ olur.

(v) H birimli olsun. Bu durumda (iii) şıkkından $(-1_H)(-1_H)=1_H1_H=1_H$ olup istenen elde edilir.

Not: H bir halka olmak üzere $\forall a,b\in H$ için $a(-b)=(-a)b=-(ab)$ olduğundan $-(ab)$ yerine $-ab$ yazılacaktır.

Tanım 4.1.3. H bir halka ve $a \in H$ olsun. $-a$ ya a elemanının **ters işaretlisi veya karşıtı** denir, a elemanının varsa $\bullet$ işlemine göre tersine de a elemanının **tersi** denir ve genellikle a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 4.1.4. $H = \{0_H\}$ tek elemanlı bir halkadır. Bu halkaya **sıfır halka veya aşikar halka** denir. Genel olarak halka sıfır halkadan farklı kabul edilir.

Teorem 4.1.5. Birimli bir halkada birim ve sıfır elemanlar birbirinden farklıdır.

İspat: H bir birimli halka olsun. $1_H \neq 0_H$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. Eğer $1_H = 0_H$ olsa $\forall a \in H$ için $a = a1_H = a0_H = 0_H$ olup $H = \{0_H\}$ olur ki bu da halkanın sıfır halkadan farklı kabul edilmesiyle çelişir. O halde $1_H \neq 0_H$ olup istenen elde edilir.

Tanım 4.1. 6. H birimli ve değişmeli bir halka ve halka $H - \{0_H\} = H^*$, ikinci işlem $.$ ye göre bir grup ise H ye cisim denir.

Örnek: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ adi toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Tanım 4.1.7. Bir H halkasında sıfırdan farklı bir a elemanı için $ab = 0_H$ veya $ba = 0_H$ olacak şekilde $\exists 0_H \neq b \in H$ bulunabilirse a elemanına halkanın bir **sıfır bölen elemanı** denir. Eğer böyle b elemanı yoksa a elemanına halkanın bir **sıfır bölen olmayan elemanı** denir.

Not: Tanımdan 0_H ne sıfır bölendir ne de sıfır bölen olmayandır.

Tanım 4.1.8. Sıfır bölensiz (sıfırdan farklı her elemanı sıfır bölen olmayan) bir halkaya bir **tam halka** denir, birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya bir **tamlık bölgesi** denir.

Teorem 4.1.9. Sonlu elemanlı bir tamlık bölgesi cisimdir.

Tanım 4.1.10. H bir halka olsun. Eğer, her $a \in H$ için $na = 0$ olacak şekilde bir $n > 0$ tamsayısı varsa, böyle $n > 0$ tam sayılarının en küçüğüne H halkasının **karakteristiği** denir. Eğer bu özelllikte hiçbir $n > 0$ tam sayısı bulunamıyorsa H ın karakteristiği sıfır denir.

Not: Tamlık bölgesinin karakteristiği sıfır değil ise asaldır.

4.2. Alt Halkalar ve İdealler

Tanım 4.2.1. H bir halka ve $\varnothing \neq S \subset H$ olsun. Eğer S kümesi H deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise S ye H nin bir **alt halkası** denir.

Not: H bir halka olsun. Bu durumda $\{0_H\}$ ve H, H nin birer alt halkasıdır. Bunlara H nin **aşikar alt halkaları** denir. H nin varsa $\{0_H\}$ ve H den farklı alt halkalarına **öz alt halkaları** denir

Teorem 4.2.2. H bir halka ve $\varnothing \neq S \subset H$ olsun. Bu takdirde S nin bir alt halka olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$ ve $ab \in S$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ S, H nin bir alt halkası olsun. Bu durumda S, H deki işlemlere göre kendi başına bir halka olup $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$ ve $ab \in S$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\forall a,b\in S$ için $a-b\in S$ ve $ab\in S$ olsun. $\varnothing\neq S\subset H$ ve $\forall a,b\in S$ için $a-b\in S$ olduğundan alt gruplardaki ilgili teoremden *S*, + işlemine göre *H* nin bir alt grubu olur. Ayrıca $S\subset H$ olduğundan $\forall a,b\in S$ için $a,b\in H$ olup $(H,+)$ bir değişmeli grup olduğundan $a+b=b+a$ olur. O halde $(S,+)$ cebirsel yapısı bir değişmeli grup olur.

$\forall a,b\in S$ için $ab\in S$ olduğundan *H* deki $\bullet$ işlemi *S* de bir iç işlem olur. Ayrıca $S\subset H$ olduğundan $\forall a,b,c\in S$ için $a,b,c\in H$ olup $(H,+,\bullet)$ bir halka olduğundan $(ab)c=a(bc)$, $a(b+c)=ab+ac$ ve $(a+b)c=ac+bc$ olur.

Böylece *S*, *H* deki işlemlere göre kendi başına bir halka olup *H* nin bir alt halkası olur.

Teorem 4.2.3. Bir halkanın birtakım alt halkalarının kesişimi de bir alt halkadır.

İspat: *H* bir halka ve $\{S_i\}_{i\in I}$, *H* nin alt halkalarının bir ailesi olsun. $\bigcap_{i\in I} S_i$ kümesinin *H* nin bir alt halkası olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $\forall i\in I$ için S_i, *H* nin bir alt halkası olduğundan $(S_i,+)$ grubu $(H,+)$ grubunun bir alt grubu olup $0_H\in S_i$ olur. $\forall i\in I$ için $0_H\in S_i$ olduğundan $0_H\in\bigcap_{i\in I} S_i$ olup

$\bigcap_{i\in I} S_i \neq \varnothing$ olur. Ayrıca $\bigcap_{i\in I} S_i \subset H$ olduğu da açıktır. Yani $\varnothing \neq \bigcap_{i\in I} S_i \subset H$ olur. Herhangi $a,b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ alalım. $a,b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ olduğundan $\forall i \in I$ için $a,b \in S_i$ olup S_i, H nin bir alt halkası olduğundan $a-b \in S_i$ ve $ab \in S_i$ olur. $\forall i \in I$ için $a-b \in S_i$ ve $ab \in S_i$ olduğundan $a-b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve $ab \in \bigcap_{i\in I} S_i$ olur. Yani $\forall a,b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ için $a-b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve $ab \in \bigcap_{i\in I} S_i$ olup ilgili teoremden $\bigcap_{i\in I} S_i$, H nin bir alt halkası olur.

Tanım 4.2.4. H bir halka ve $\varnothing \neq I \subset H$ olsun. Eğer

(i) $\forall a,b \in I$ için $a-b \in I$ ve

(ii) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in H$ için $ra \in I$ $(ar \in I)$

ise I ya H nin bir **sol (sağ) ideali** denir. Hem sol, hem de sağ bir ideale **iki taraflı ideal** veya sadece **ideal** denir.

Not: Her ideal bir alt halkadır, fakat her alt halka bir ideal olmayabilir.

Not: $\{0_H\}$ ve H, bir H halkasının birer idealidir. Bunlara H nin **aşikar idealleri** denir. H nin varsa $\{0_H\}$ ve H den farklı ideallerine de **öz idealleri** denir.

Teorem 4.2.5. Bir H halkasının birtakım sol (sağ) ideallerinin kesişimi de H nin bir sol (sağ) idealidir.

İspat: $\{S_i\}_{i\in I}$, H nin sol (sağ) ideallerinin bir ailesi olsun. $\bigcap_{i\in I} S_i$ kümesinin H nin bir sol (sağ) ideali olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $\forall i\in I$ için S_i, H nin bir sol (sağ) ideali olduğundan $(S_i,+)$ grubu $(H,+)$ grubunun bir alt grubu olup $0_H \in S_i$ olur. $\forall i\in I$ için $0_H \in S_i$ olduğundan $0_H \in \bigcap_{i\in I} S_i$ olup $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \varnothing$ olur. Ayrıca $\bigcap_{i\in I} S_i \subset H$ olduğu da açıktır. Yani $\varnothing \neq \bigcap_{i\in I} S_i \subset H$ olur. Herhangi $a,b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve herhangi $r\in H$ alalım. $a,b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ olduğundan $\forall i\in I$ için $a,b\in S_i$ olup S_i, H nin bir sol (sağ) ideali olduğundan $a-b\in S_i$ ve $ra\in S_i$ $(ar\in S_i)$ olur. $\forall i\in I$ için $a-b\in S_i$ ve $ra\in S_i$ $(ar\in S_i)$ olduğundan $a-b\in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve $ra\in \bigcap_{i\in I} S_i$ $\left(ar\in \bigcap_{i\in I} S_i\right)$ olur. Yani $\forall a,b\in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve $\forall r\in H$ için $a-b\in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve $ra\in \bigcap_{i\in I} S_i$ $\left(ar\in \bigcap_{i\in I} S_i\right)$ olup ilgili teoremden $\bigcap_{i\in I} S_i$, H nin bir sol (sağ) ideali olur.

Tanım 4.2.6. S, H halkasının bir alt kümesi olsun. H ın S yi kapsayan bütün ideallerinin arakesitine S **nin ürettiği ideal** denir ve (S) ile gösterilir. Eğer $S=\{a\}$ tek elemanlı bir küme ise S nin ürettiği ideale **temel(esas) ideal** denir ve (a) ile gösterilir.

Önerme 4.2.7. Tam sayılar halkasının her ideali bir temel idealdir.

Tanım 4.2.8. Her ideali temel ideal olan bir tamlık bölgesine bir **temel ideal bölgesi** denir.

Tanım 4.2.9. I ve J, H halkasının iki ideali olsun. $I+J=\{a+b:\ a\in I, b\in J\}$ kümesine I ve J **ideallerinin toplamı** denir.

Tanım 4.2.10. H bir halka ve I, H halkasının bir ideali olsun. $\forall\ a,b\in H$ için, $a\equiv b\ (\text{mod } I)\Leftrightarrow a-b\in I$ ile tanımlayalım. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. $h\in H$ ın denklik sınıfı da $h+I=\{h+a:\ a\in I\}$ olup bütün denklik sınıflarının kümesi H/I ile gösterilir.

Önerme 4.2.11. H halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında $(a+I)\oplus(b+I)=(a+b)+I$, $(a+I)\odot(b+I)=(ab)+I$ ile tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre H/I bir halkadır.

Tanım 4.2.12. Bir önceki önermedeki halkaya H ın I idealine göre **bölüm halkası** denir.