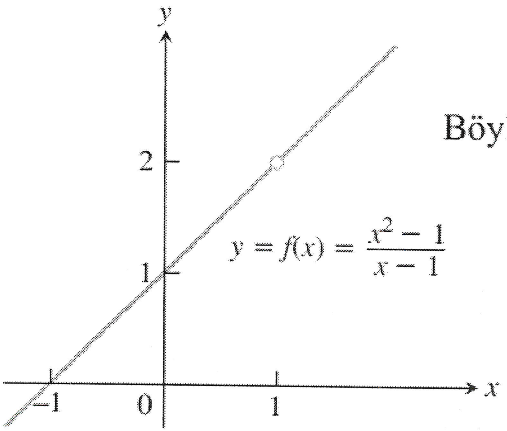
4 Limit

Bir Fonksiyonun Bir Nokta Civarındaki Davranışı

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

fonksiyonu $x = 1$ civarında nasıl davranır?

Verilen formül, $x = 1$ hariç bütün x reel sayıları için f'yi tanımlı kılar. (0 ile bölemeyiz). Herhangi bir $x \neq 1$ değeri için, payı çarpanlarına ayırıp, ortak çarpanı sadeleştirerek formülü basitleştirebiliriz:



$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1\,, \quad x \neq 1$$

Böylece f'nin grafiği bir noktası, yani $(1, 2)$, çıkartılmış olan $y = x + 1$ doğrusu olur. Bu çıkartılmış nokta Şekilde bir "boşluk" olarak gösterilmektedir. $f(1)$ tanımlı olmadığı halde x'i 1'e *yeterince yakın seçerek*, $f(x)$'in değerini 2'ye *istediğimiz kadar yakın* bulabileceğimiz açıktır

x'in 1'in altında ve üstündeki değerleri	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \qquad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

x 1'e yaklaşırken $f(x)$ 2 *limitine* yaklaşır deriz ve bunu

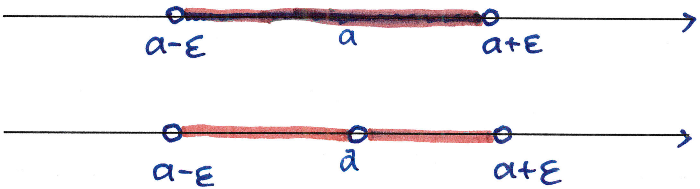
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \qquad \text{veya} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

olarak yazarız.

4.1 Fonksiyonların Limitleri

Tanım 4.1.1 : *$a \in \mathbb{R}$ noktası ve $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı verilsin. $(a-\epsilon,\ a+\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} :\ a-\epsilon < x < a+\epsilon\}$ açık aralığına a noktasının ϵ-komşuluğu denir ve $U_\epsilon(a)$ ile gösterilir. $U_\epsilon(a) \backslash \{a\}$ kümesine de a'nın delinmiş ϵ-komşuluğu denir ve $\overset{\circ}{U}_\epsilon(a)$ ile gösterilir.*

Örneğin, $U_{\frac{1}{2}}(0) = (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$, $\overset{\circ}{U}_{\frac{1}{2}}(0) = (-\frac{1}{2},\ 0) \cup (0,\ \frac{1}{2})$,
$U_{\frac{1}{3}}(-1) = (-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3})$, $\overset{\circ}{U}_{\frac{1}{3}}(-1) = (-\frac{4}{3},\ -1) \cup (-1, -\frac{2}{3})$ olduğu açıktır.



$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \backslash \{a\}$

Tanım 4.1.2 : *$E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. a'nın her $\overset{\circ}{U}_\epsilon(a)$ komşuluğunda E kümesinin en az bir elemanı varsa a noktasına E kümesinin bir limit (yığılma) noktası denir.*

Eğer, $a \in E$ ve a noktası E nin bir limit noktası değilse, a ya E nin bir izole (yaltık) noktası adı verilir.

→ E-nin yığılma noktaları kümesi E' ile gösterilir. Bu tanıma göre $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \in E' \Leftrightarrow \forall \delta > 0$ için $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E \neq \emptyset$ dir.

Örneğin, $E = [0,1]$ kümesinin her noktası $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1)$ ve $[0,1]$ kümelerinin bir limit noktasıdır. Tanımdan ve bu örnekten de görüldüğü gibi bir kümenin limit noktası kümenin kendisine ait olmayabilir.

- $\mathbb{R}$ nin her noktası $\mathbb{Q}$ nun bir limit noktasıdır. Yani $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
- $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin yalnızca bir $0 \in \mathbb{R}$ limit noktası vardır.
- Eğer, $a \in \mathbb{R}$ noktası E nin bir limit noktası ise, her $\overset{\circ}{U}_\epsilon(a)$ komşuluğunda E nin sonsuz sayıda elemanı vardır.

- $a = 2$ noktası $E = [-1, 1] \cup \{2\}$ kümesinin izole noktasıdır. Gerçekten, her $0 < \delta < 1/2$ sayısı için $E \cap U_\delta(2) = \{2\}$ olduğundan, $2 \in E$ noktası E nin limit noktası olamaz.

Tanım 4.1.3 *:(Cauchy'ye göre): Eğer, her $\epsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $0 < |x-a| < \delta$ iken $|f(x) - A| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f nin X kümesine göre a noktasındaki limiti A dır denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ veya $x \in X$, $x \to a$ iken $f(x) \to A$ şeklinde yazılır.*

Bu tanım daha kısa olarak şu şekilde yazılabilir:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall x \in X$ için
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ olur.

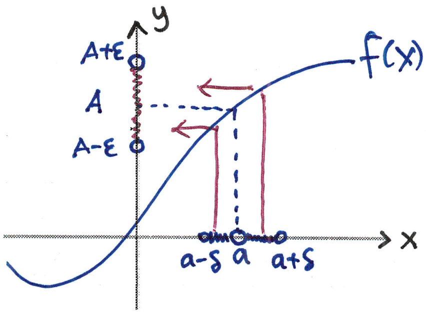
Bu tanımın değili şu şekilde yazılabilir:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$ öyle ki $\forall \delta > 0$ için $\exists x \in X$ öyle ki
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \epsilon$ olur.

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Longleftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$$

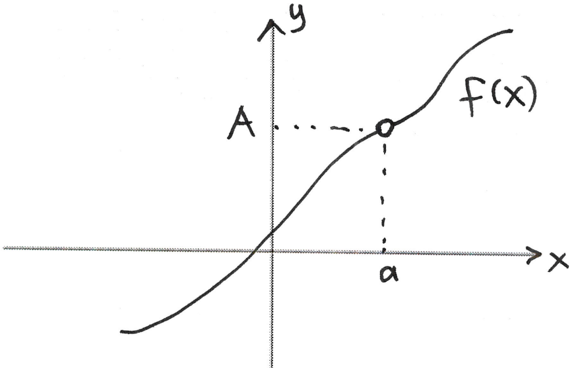
$$|f(x) - A| \leq \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_\epsilon(A) \Longleftrightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

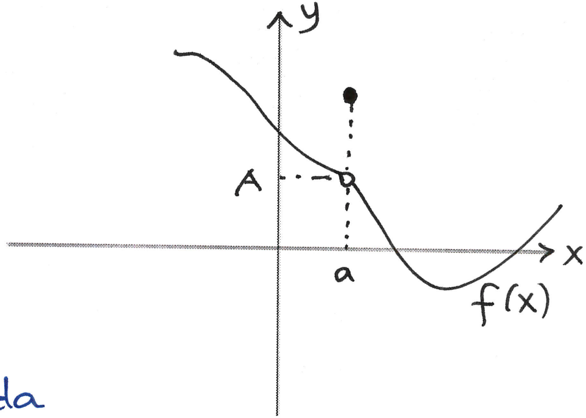
$\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow A$ nın her $\overset{\circ}{U}_\epsilon(A)$ komşuluğu için a nın öyle bir $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ komşuluğu vardır ki, herhangi $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(A)$ (veya $f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X) \subset U_\epsilon(A)$) olur.

Uyarı: Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasının bir delinmiş $\overset{\circ}{U}(a)$ komşuluğunda tanımlı ise, yani $\overset{\circ}{U}(a) \cap X = \overset{\circ}{U}(a) \cap \mathbb{R} = \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ ise, $X \ni x \to a$ (veya $x \in X, x \to a$ iken) yerine daha kısa olan $x \to a$ sembolünü kullanacağız.



Kısaca f-nin a noktasındaki limiti, x değişkenlerinin a noktası civarında iken a-ya yaklaşırken f-nin neye (değerlerin neye) yaklaştığını bulmaktır.

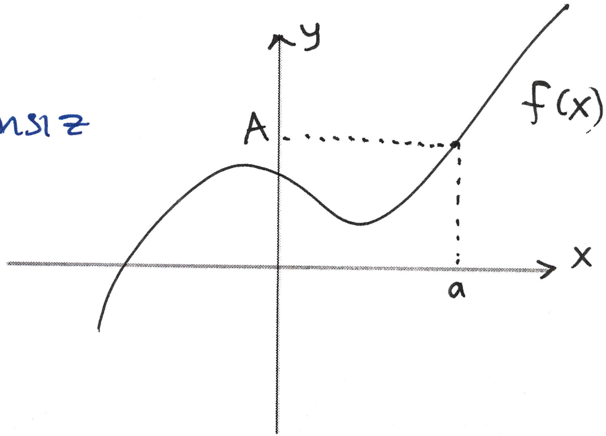




f fonksiyonunun $x=a$ noktasında limitinin olmasıyla o noktada değerinin olması arasında bir ilişki yoktur.

$f(x)$, $x=a$'da tanımlı veya tanımsız olsa bile limiti belirlemez.

Yandaki grafiklerin tümünde $\lim_{x \to a} f(x) = A$ dır.



Örnek : *$X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ ve $a = 0$ olmak üzere*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\delta = \epsilon$ alalım. O halde, her $x \in X$ için $|x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$ olduğundan dolayı her $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$ için $|x\sin\frac{1}{x}| \leq \epsilon$ bulunur. Demek ki, her $\epsilon > 0$ için $\exists\delta = \epsilon$ öyle ki $\forall x \in X$ için

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x\sin\frac{1}{x}| \leq \epsilon$$

olur. Bu ise $\lim_{x\longrightarrow 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ doğruluğunu gösterir. $\diamond$

Örnek : *$\lim_{x\longrightarrow 0} |sgnx| = 1$ olduğunu gösteriniz.*

Her $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $|\mathrm{Sgn}x| = 1$ olduğundan dolayı 0 ve 1 noktalarının sırasıyla herhangi $\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ ve $\overset{\circ}{U}_\epsilon(1)$ komşulukları için $f(\overset{\circ}{U}_\delta(0)) = \{1\} \subset \overset{\circ}{U}_\epsilon(1)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\lim_{x\longrightarrow 0} |\mathrm{sgn}x| = 1$ dir.

Örnek : *$X=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ve $a=1$ olsun. Limit tanımını kullanarak*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı verildiğinde her $x\in \mathring{U}_\delta(1)$ için $|\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{2}|<\epsilon$ olacak şekilde ϵ'na bağlı $\delta>0$ sayısını bulalım. $\delta<1$ için Her $x\in(0,2)$ olduğunda $|\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{2}|=\dfrac{|x-1|}{2(x+1)}<\dfrac{1}{2}|x-1|$ olduğundan, $\delta=\min\{2\epsilon,1\}>0$ alırsak her $x\in U_\delta(1)$ için

$$|x-1|<\delta\Rightarrow|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}|<\epsilon$$

bulunur. Böylece, her $\epsilon>0$ için $\exists\delta=\min\{2\epsilon,1\}>0$ öyle ki $\forall x\in U_\delta(1)$ için $|\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{2}|<\epsilon$ olur.

Örnek : $\lim\limits_{x\to 3} 4x-5=7$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. $0<|x-3|<\delta$ olduğunda $|(4x-5)-7|<\varepsilon$ olacak şekilde $\exists\delta:\delta(\varepsilon)>0$ bulmalıyız.

Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-3|<\delta$ olsun.

$$|(4x-5)-7|=|4x-12|=4|x-3|<4\delta$$

olup $|(4x-5)-7|<\varepsilon$ olması gereği $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ seçilmelidir.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ sabit fonksiyonunun her noktada limiti kendisidir. Çünkü Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı, $\forall a\in\mathbb{R}$ için $\delta>0$ ne olursa olsun $0<|x-a|<\delta$ olduğunda $|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$ olur. Yani $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ olur.

Örnek : $\lim_{x\to 2} x^2-5=-1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. $0<|x-2|<\delta$ olduğunda $|(x^2-5)-(-1)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\exists\delta:\delta(\varepsilon)>0$ bulmalıyız. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-2|<\delta$ olsun.

$$\begin{aligned}|(x^2-5)-(-1)|=|x^2-4|=|x-2||x+2|<\delta|x+2|\\ =\delta|(x-2)+4|\\ \le\delta(|x-2|+4)\\ \le\delta(\delta+4)=\delta^2+4\delta\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\delta^2+4\delta=\varepsilon$ ifadesinden $\delta=\dfrac{-4+\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$

bulunur.

II. Yol: Limit gösteriminde amaç her $\varepsilon>0$ için bir $\delta>0$ sayısı bulmak olduğundan δ-nın sınırlandırılmasında da bir sakınca yoktur. Buna göre soruyu tekrar çözersek

$\forall \varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-2|<\delta$ olduğunda $\delta \leq 1$ kısıtlanırsa

$0<|x-2|<\delta \leq 1 \Rightarrow x \neq 2$ ve $-1<x-2<1 \Rightarrow 3<x+2<5$

olur. Buradan

$$|x^2-5-(-1)| = |x^2-4| = |x-2|\cdot|x+2|$$
$$< \delta \cdot |x+2| < 5\cdot\delta$$

olup $\varepsilon>0$ sayısı için $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ seçilmelidir.

NOT: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki limitinin L olması demek verilen her $\varepsilon>0$ için $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta>0$ sayısını bulmak demektir. Limit δ-nın varlığı ile ilgilenir. Büyüklüğü ile ilgilenmez.

Tanım 4.1.4 *(Heyne'ye göre):* *$X \subset \mathbb{R}, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ ise, f nin a noktasında limiti A dır denir ve $\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A$ veya $x \in X, x \to a$ iken $f(x) \to A$ yazılır.*

Bu ve ileride verecegimiz tanımlar verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}$ olmak uzere $x \longrightarrow a$ (veya $x \longrightarrow a^-, x \longrightarrow a^+$) ve $a = +\infty (a = -\infty)$ olmak üzere $x \to +\infty$ (veya $x \longrightarrow -\infty$) iken limitinin mevcut olmadığını göstermekte büyük kolaylık sağlar.

Bu tanımın değilini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

$\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan öyle (x_n) dizisi vardır ki, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq A$ dır.

Önerme 4.1.5 : *Limitin Cauchy ve Heyne'ye göre tanımları denktir.*

İspat: *(Cauchy)* $\Rightarrow$ *(Heyne)* $\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A$ olsun (Cauchy'ye göre). Bu durumda, her $\epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x) - A| < \epsilon$ olur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \backslash \{a\}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. O halde, $\exists n_\epsilon = n_{\delta(\epsilon)} \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ dir. Dolayısıyla, $|f(x_n) - A| < \epsilon$ elde edilir. Böylece, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için ($x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ olduğundan) $|f(x_n) - A| < \epsilon$ bulunur. Bu da Heyne'ye göre $\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A$ olması demektir.

(Heyne) $\Rightarrow$ *(Cauchy)* Cauchy'ye göre $x \in X$ için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ bağıntısının gerçeklenmediğini varsayalım. O halde, verilen $\epsilon > 0$ sayısı için $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_n}(a) \cap X$ öyle ki $|f(x) - A| \geq \epsilon$ sağlanır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_n}(a) \cap X$, $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $|x_n - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$ koşullarının sağlandığı ve son eşitsizlikten de $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ elde edilir. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - A| \geq \epsilon$ olduğundan, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq A$ elde ederiz. Bu da Heyne'ye göre $\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A$ olması ile çelişki olur. □

Örnek : $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ *limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.*

Çözüm:

$$x_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

(x_n) ve (y_n) dizilerini gözönüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$

için $x_n, y_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$ olduğu açıktır. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin \frac{1}{x_n} = -1$ ve $\sin \frac{1}{y_n} = 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = -1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{y_n} = 1$$

elde edilir. Demek ki, her $A \in \mathbb{R}$ sayısı Heyne'ye göre $\sin \frac{1}{x}$ fonksiyonunun 0 noktasında limiti olmaz. Bu da istenen limitin mevcut olmadığını göstermektedir. ◇

ÖR: $k \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^k$ kuvvet fonksiyonunun her $a \in \mathbb{R}$ noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^k = a^k$ dır.

Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq a$ ve $\lim x_n = a$ o.ş. bir (x_n) dizisi alındığında Heyne göre

$$\lim_{x\to a} x^k = \lim_{n\to\infty} (x_n)^k = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n \cdots x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \cdots \lim_{n\to\infty} x_n$$
$$= a^k$$

bulunur.

ÖR: $a \neq 0$ o.ü. $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ dır. Çünkü $x_n \to a$ olan herhangi $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ dizisi için

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{a}$$

dur. Fakat $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ limiti yoktur.

Çünkü $(x_n) = \frac{1}{n}$, $(y_n) = \frac{-1}{n}$ alınırsa $f(x_n) = n \to +\infty$, $f(y_n) = -n \to -\infty$ olup Heyne göre ıraksaktır.