2. FONKSİYONLAR

2.1. Fonksiyon kavramı ve temel tanımlar

Tanım: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ kümeleri verilsin. $f \subset A \times B$ olmak üzere her $x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in B$ varsa f bağıntısına A'dan B'ye bir fonksiyon denir ve $f: A \to B$ sembolü ile gösterilir. Yani

(i) Her $x \in A$ için $f(x) = y$ olacak şekilde bir $y \in B$ var,

(ii) $\forall x \in A$ için $f(x) = y_1$ ve $f(x) = y_2$ ise $y_1 = y_2$ dir.

$(x,y) \in f$ gösterimi yerine genellikle $y = f(x)$ gösterimi kullanılır. $f: A \to B$ fonksiyonu için A kümesine f'nin tanım kümesi B'ye ise f'nin değer kümesi denir. f'nin tanım kümesi D_f; değer kümesi ise R_f ile gösterilir.

Bundan sonra $A, B \subset \mathbb{R}$ varsayılarak f fonksiyonuna da Reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyon denilecektir.

Bir $f: A \to B$ fonksiyonu verildiğinde

(i) $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$ kümesine f-nin grafiği

(ii) $\mathrm{Im} f = \{f(x) : x \in A\} \subset B$ kümesine f-nin görüntü kümesi

(iii) $E \subset A$ olmak üzere

$f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ kümesine E-nin görüntü kümesi

(iv) $F \subset B$ olmak üzere

$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}$ kümesine de F'nin ters-görüntüsü denir.

ÖR: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x - 1$ için

D_f, R_f, $\mathrm{Im} f = ?$ $E = [0, 3)$ için $f(E) = ?$

$F = (-1, 2]$ için $f^{-1}(F) = ?$

f'nin tanımından da anlaşılacağı üzere $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$ dir.

$f(x) = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$ olup

$\rightarrow Im_f = \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = \{ (x-2)^2 - 5 : x \in \mathbb{R} \} = [-5, +\infty)$

$\rightarrow f(E) = \{ f(x) : x \in [0,3) \}$ için

$x \in [0,3)$ ise $0 \leq x < 3$ olup $-2 \leq x-2 < 1 \Rightarrow$

$0 \leq (x-2)^2 \leq 4 \Rightarrow -5 \leq (x-2)^2 - 5 \leq -1 \Rightarrow f(x) \in [-5,-1]$

olduğundan $f(E) = [-5,-1]$ dir.

$\rightarrow f^{-1}(F) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in (-1,2] \}$ için

$f(x) \in (-1,2] \Rightarrow -1 < (x-2)^2 - 5 \leq 2 \Rightarrow 4 < (x-2)^2 \leq 7 \Rightarrow$

$2 < |x-2| \leq \sqrt{7} \Rightarrow (2 < |x-2|)$ ve $(|x-2| \leq \sqrt{7}) \Rightarrow$

$(x > 4$ veya $x < 0)$ ve $(2-\sqrt{7} \leq x \leq 2+\sqrt{7}) \Rightarrow$

$x \in [(-\infty,0) \cup (4,+\infty)] \cap [2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}]$ olup

$f^{-1}(F) = [(-\infty,0) \cup (4,+\infty)] \cap [2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}]$ dir.

Bir f fonksiyonunun tanım kümesi denildiği zaman $\mathbb{R}$-nin, $f(x)$ bir reel sayı olacak şekilde en geniş alt kümesi anlaşılacaktır.

Örneğin $f(x) = 4+\sqrt{x-3}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini ve görüntü kümesini bulalım.

$f(x) = 4+\sqrt{x-3}$ için karekök fonk. gereği $x-3 \geq 0$ olmalıdır. O zaman $D_f = [3, +\infty)$ olup $\forall x \in D_f$ için $\sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow$ $f(x) \geq 4$ olur. Yani $\mathrm{Im}_f = [4, +\infty)$ olur.

ÖR: $f(x) = \sqrt{x^2+2x-15}$ fonk. için en geniş tanım kümesi?

Yine $f(x)$ fonksiyonu karekökle tanımlı olduğundan

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2x-15 \geq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : (x+5)(x-3) \geq 0\}$$

x		-5		3	
f	$+$	0	$-$	0	$+$

O zaman $D_f = (-\infty, -5] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} \setminus (-5, 3)$.

NOT:

$y = f(x)$ fonksiyonu $(x = g(y))$ için x-e bağımsız; y-ye bağımlı değişken denir. Verilen bir grafiğin fonksiyon belirtebilmesi için bağımsız değişken eksenine çizilen dik doğrular en fazla bir noktada kesmelidir.

$y = f(x)$ şeklinde fonk. belirtir.

$x = g(y)$ şeklinde bir fonk. belirler

$y = f(x)$ veya $x = g(y)$ şeklinde fonk. belirtmez.

ÖR: $A=\{1,2,3\}$ ve $B=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi A-dan B-ye bir fonksiyondur?

1) $\alpha=\{(1,1),(2,b),(3,c)\}$

2) $\beta=\{(1,c),(2,c)\}$

3) $\gamma=\{(1,a),(2,c),(3,d),(2,b)\}$

4) $\theta=\{(1,d),(2,d),(3,a)\}$

ÖR: Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}$-den $\mathbb{R}$-ye bir fonksiyondur?

1) $\{(x,y) : |y| \leq |x|\}$

2) $\{(x,y) : y=x^2\}$

3) $\{(x,y) : y=-2\}$

4) $\{(x,y) : x=1\}$

5) $\{(x,y) : x\neq 0$ ise $y=\frac{1}{x}$, $x=0$ " $y=3/2\}$

6) $\{(x,y) : x=[\![y]\!]\}$

Tanım: $y=f(x)$, $y=g(x)$ iki fonksiyon olsun. Eğer $D_f=D_g$ ve $\forall x \in D_f=D_g$ için $f(x)=g(x)$ ise f ile g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir ve $f=g$ ile gösterilir.

Tanım: $f: A \to B$, $g: B \to C$ birer fonksiyon olsunlar.

(i) $\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1)=f(x_2)$ ise (veya $\forall x \in A$ için $f(x)=c$ ise) f-ye sabit fonksiyon denir.

(ii) $\forall y \in B$ için $f(x)=y$ o.ş. $\exists x \in A$ varsa (veya $\operatorname{Im} f = B$ ise) f-ye örten fonksiyon denir. (Surjektif)

(iii) $\operatorname{Im} f \subset B$ ve $\operatorname{Im} f \neq B$ ise f-ye içine fonksiyon denir.

(iv) $\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1)=f(x_2)$ olduğunda $x_1=x_2$ ise (veya $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise) f-ye 1-1 (birebir) fonksiyon denir. (İnjektif)

(v) $\forall x \in A$ için $g(f(x))=(g \circ f)(x)$ şeklinde tanımlı $g \circ f: A \to C$ fonksiyonuna bileşke fonk. denir.

(vi) $\forall x \in A$ için $I_A(x) = x$ şeklinde tanımlı $I_A : A \to A$ fonksiyonuna birim (özdeş) fonksiyon denir.

(vii) $f : A \to B$ fonksiyonu için $f \circ g = I_B$, $g \circ f = I_A$ o.ş. bir $g : B \to A$ fonksiyonu varsa g'ye f'nin ters fonksiyonu denir ve $g := f^{-1}$ ile gösterilir.

UYARI:

1) Bir fonksiyon birebirdir $\Leftrightarrow$ bağımsız değişken eksenine çizilen paralel doğrular eğriyi en fazla bir noktada keser.

2) $f : A \to B$ fonksiyonu 1-1 ve örtendir $\Leftrightarrow$ $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu vardır. $\forall x \in A$ için $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

3) f ve g fonksiyonları için

- $f \circ I = I \circ f = f$
- $f \circ f^{-1} = I$, $f^{-1} \circ f = I$
- $f \circ g \neq g \circ f$
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Tanım : *$X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f, g : X \to Y$ fonksiyonları verilsin. Bu iki fonksiyonun $f + g$ toplamı, $f - g$ farkı, $f.g$ çarpımı ve f/g bölümü*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x),$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $f + g$, $f - g$, ve $f.g$ fonksiyonları f ve g fonksiyonlarının tanımlı olduğu tüm noktalarda, f/g fonksiyonu da $g(x) = 0$ denklemini sağlayan x ler hariç diğer tüm noktalarda tanımlıdır.

- *Yani f, g fonksiyonlarının tanım kümeleri D_f ve D_g ise D_{f+g}, D_{f-g} ve D_{fg} fonksiyonları için tanım kümeleri $D_f \cap D_g$; $D_{\frac{f}{g}}$ fonksiyonunki ise $\left(D_f \cap D_g\right) \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\right\}$ olur.*

Örneğin, $f(x) = \sqrt{x-1}$ ve $g(x) = \sqrt{5-x}$ fonksiyonları için $D(f) = [1,+\infty)$, $D(g) = (-\infty,5]$, $D(f+g) = D(f.g) = [1,5]$, $D(f/g) = [1,5)$,

Örneğin $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=2x^2+1$ için

- $(f+g)(x)=3x^2+3x+1$, $(f-g)(x)=-x^2+3x-1$,
- $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2+1)=(2x^2+1)^2+3(2x^2+1)=4x^4+10x^2+4$
- $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3x)=2(x^2+3x)^2+1=2x^4+12x^3+18x^2+1.$

$f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2-3x-4}}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

$f_1(x)=5x,\ f_2(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$ alınırsa $D_{f_1}=\mathbb{R},\ D_{f_2}=(-\infty,-1]\cup[4,\infty)$ olup

$f(x)=\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(x)$ için $D_f=(\mathbb{R}\cap(-\infty,-1]\cup[4,\infty))\setminus\{-1,4\}=(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$

bulunur.

Kaydırma Formülleri

Dikey Kaydırma

$y = f(x) + k$ — $k > 0$ ise f'nin grafiğini k birim yukarı kaydırır,
$k < 0$ ise $|k|$ birim *aşağı* kaydırır.

Yatay Kaydırma

$y = f(x + h)$ — $h > 0$ ise f'nin grafiğini h birim sola kaydırır.
$h < 0$ ise grafiği $|h|$ birim *sağa* kaydırır.

$f(x) = x^2$'yi yukarı (veya aşağı) kaydırmak için, f'in formülüne pozitif (veya negatif) bir sabit ekleriz

$y = x^2$ nin grafiğini sola kaydırmak için x'e pozitif bir sabit ekleriz. Grafiğini sağa kaydırmak için x'e negatif bir sabit ekleriz

Bir Fonksiyonun Grafiğini Ölçeklemek ve Yansıtmak

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini ölçeklemek, onu dikey veya yatay olarak esnetmek veya sıkıştırmaktır. Bu, f fonksiyonunu veya bağımsız x değişkenini uygun bir c sabiti ile çarpmakla yapılır. Koordinat eksenlerinin bir tarafından diğer tarafına yansıtmalar $c = -1$ olduğu özel hallerdir.

Dikey ve Yatay Ölçekleme ve Yansıtma Formülleri

$c > 1$ için

$y = cf(x)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar dikey olarak uzatır.
$y = \frac{1}{c} f(x)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar dikey olarak sıkıştırır.
$y = f(cx)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar yatay olarak sıkıştırır.
$y = f(x/c)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar yatay olarak uzatır.

$c = -1$ için

$y = -f(x)$	f'nin grafiğini x-ekseninin diğer tarafına yansıtır.
$y = f(-x)$	f'nin grafiğini y-ekseninin diğer tarafına yansıtır.

ÖRNEK Bir Grafiği Ölçeklemek ve Yansıtmak

(a) Dikey: $y = 3\sqrt{x}$ elde etmek için $y = \sqrt{x}$ 'in sağ tarafını 3 ile çarpmak, grafiği dikey olarak 3 çarpanı kadar uzatır, oysa $1/3$ ile çarpmak grafiği 3 çarpanı kadar sıkıştırır.

$y = \sqrt{x}$ grafiğinin dikey olarak 3 kat uzatılması ve sıkıştırılması

$y = \sqrt{x}$ grafiğinin yatay olarak 3 kat uzatılması ve sıkıştırılması

(b) Yatay: $y = \sqrt{3x}$ 'in grafiği, $y = \sqrt{x}$ 'in grafiğinin 3 çarpanı kadar sıkıştırılmışıdır ve $y = \sqrt{x/3}$ yatay olarak 3 çarpanı kadar uzatılmasıdır

$y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$ olduğuna dikkat edin, dolayısıyla, bir yatay sıkıştırma farklı bir ölçekleme çarpanı ile bir dikey uzatmaya karşı gelebilir. Benzer şekilde, bir yatay uzatma farklı bir ölçekleme çarpanı ile bir dikey sıkıştırmaya karşı gelebilir.

(c) Yansıma: $y = -\sqrt{x}$'in grafiği, $y = \sqrt{x}$ x-ekseninin diğer tarafına bir yansımasıdır, ve $y = \sqrt{-x}$, y-ekseninin diğer tarafına bir yansımadır

$y = \sqrt{x}$ grafiğinin
eksenlerin diğer taraflarına yansıtılması

ÖRNEK Ölçekleme ve Yansıtmaları Birleştirmek

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonu veriliyor

(a) grafiği yatay olarak 2 kat sıkıştıran ve sonra da y-ekseninin diğer tarafına yansıtan

(b) grafiği dikey olarak 2 kat sıkıştıran ve sonra da x-ekseninin diğer tarafına yansıtan

Elipsler

Merkezi orijinde olan r yarıçaplı bir çemberin standart denkleminde x yerine cx yazmakla

$$c^2x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

elde edilir.

$0 < c < 1$ ise (1) denkleminin grafiği, çemberi yatay olarak uzatır; $c > 1$ ise çember yatay olarak sıkıştırılır. Her iki durumda da (1) denkleminin grafiği bir elipstir

(a) çember

(b) elips, $0 < c < 1$

(c) elips, $c > 1$

Çift Fonksiyonlar, Tek Fonksiyonlar

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

$$f(-x) = f(x) \text{ ise } \textbf{çift fonksiyon}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ ise } \textbf{tek fonksiyon}$$

dur.

Simetrik Küme

$A \subset \mathbb{R}$ olsun. $\forall x \in A$ için $-x \in A$ ise A-ya simetrik küme denir.

Bir çift fonksiyonun grafiği **y-eksenine göre simetrik**tir. $f(-x) = f(x)$ olduğundan ancak ve yalnız $(-x, y)$ noktası grafik üzerinde ise (x, y) noktası da grafik üzerindedir

Bir tek fonksiyonun grafiği **orijine göre simetrik**tir. $f(-x) = -f(x)$ olduğundan ancak ve yalnız $(-x, -y)$ noktası grafik üzerinde ise (x, y) noktası da grafik üzerindedir

Aşağıdaki şekil $y = -x^2$'nin grafiğini iki yeni konuma kaydırılmış olarak göstermektedir. Yeni grafikler için denklemler yazınız.

Aşağıdaki şekil $y = x^2$'nin grafiğini iki yeni konuma kaydırılmış olarak göstermektedir. Yeni grafikler için denklemler yazınız.

(a)-(d)'deki denklemlere Şekildeki grafiklerden hangilerinin karşılık geldiğini bulun..

a. $y = (x-1)^2 - 4$

b. $y = (x-2)^2 + 2$

c. $y = (x+2)^2 + 2$

d. $y = (x+3)^2 - 2$

Aşağıdaki şekil $y = -x^2$'nin grafiğini dört yeni konuma kaydırılmış olarak göstermektedir. Her yeni grafik için bir denklem yazınız.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $f(x) \leq L$ o.ş. $\exists L \in \mathbb{R}$ varsa f'ye üstten sınırlı; $\forall x \in A$ için $K \leq f(x)$ o.ş. $\exists K \in \mathbb{R}$ varsa f'ye alttan sınırlı fonk. denir. Hem alttan hemde üstten sınırlı fonksiyona kısaca sınırlı fonksiyon denir.

Örneğin $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ olup f sınırsızdır. $f: [-2,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ için $\operatorname{Im} f = [0,9)$ olup $\forall x \in [-2,3)$ için $K \leq f(x) \leq L$ o.ş. $K, L \in \mathbb{R}$ vardır. Mesela $-3 \leq f(x) \leq 11$ yazılabilir.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ olduğunda

- $f(x_1) < f(x_2)$ ise f-ye A üzerinde artan fonk,
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f-ye A üzerinde azalmayan fonk,
- $f(x_1) > f(x_2)$ ise f-ye A üzerinde azalan fonk,
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f-ye A üzerinde artmayan fonk.

denir. Bu özelliklerden birisine sahip fonksiyona monoton fonk. denir.

Eğer f, tanım kümesinde monoton olduğu sonlu sayıda alt alt aralığa sahipse bu fonksiyona parçalı monoton denir.

ÖR:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında azalan, $(0, +\infty)$ aralığında artan olup $\mathbb{R}$-de parçalı monoton dur.

ÖR: $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x \in [0, 1] \\ 1-x, & x \in (1, \infty) \end{cases}$ fonksiyonunu inceleyelim.

$g(x)$; $(-\infty,0)$ aralığında azalan, $(0,1)$ aralığında sabit ve $(1,+\infty)$ aralığında azalan olup $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $g(x_1) \geq g(x_2)$ olup g artmayandır.

ÖR:

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ x/2, & 2 < x \end{cases}$$

fonksiyonunu incelelyelim.

$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $h(x_1) \leq h(x_2)$ olduğundan h azalmayandır.

Tanım: $f(x)=|x|$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mutlak değer fonksiyonu; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $g(x)=[\![x]\!]$ tamdeğer fonksiyonu, $h:\mathbb{R}\to\{-1,0,1\}$ $h(x)=\mathrm{Sgn}(x)$ işaret fonksiyonu adını alır.

$$f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

Bu tanımdan hareketle

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} \qquad \operatorname{Sgn}(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

yazılabilir. Örneğin $|x^2 - x - 2|$ ve $\operatorname{Sgn}(x^2 - x - 2)$ fonksiyonları incelenirse

$$|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \leq -1 \\ -x^2 + x + 2, & -1 < x < 2 \\ x^2 - x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

x		-1		2	
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\operatorname{Sgn}(x^2 - x - 2) = \begin{cases} 1, & x < -1 \ \vee \ x > 2 \\ 0, & x = -1,\ x = 2 \\ -1, & -1 < x < 2 \end{cases}$$

2.1.1. Önerme: Her monoton artan (veya azalan) fonksiyon birebirdir.

İspat: Kabul edelimki f monoton artan bir fonksiyon olsun. $\forall\, x_1, x_2 \in D_f$ alalım ve $x_1 \neq x_2$ olsun. O zaman $x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$ dir. Bu durumda f artan old. dan $f(x_1) < f(x_2)$ veya $f(x_2) < f(x_1)$ dir. Sonuçta her iki durumda da $f(x_1) \neq f(x_2)$ olup f, 1-1 fonksiyondur.

Bu önermenin tersi doğru değildir. Yani 1-1 fonksiyon monoton olmak zorunda değildir. Örneğin yandaki f fonksiyonu 1-1 ama monoton artan (veya azalan) değildir.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $B \subset A$ olsun. Her $x \in B$ için $g(x) = f(x)$ şeklinde tanımlı $g: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f'nin B-ye kısıtlanışı denir ve $g = f|_B$ ile gösterilir.

Örneğin $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 2$ için $B = (-3, 7]$ alınırsa $f|_B = g$ için $g: (-3, 7] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x + 2$ olur.

Yine $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2 - |x-1||$ fonksiyonu için

$$f(x) = \begin{cases} |3-x|, & x \geq 1 \\ |x+1| & x < 1 \end{cases}$$ olup

f, $\mathbb{R}$-de monoton değildir.

Ama f'nin $(-\infty, -1) = B_1$, $(-1, 1) = B_2$, $(1, 3) = B_3$ ve $(3, +\infty) = B_4$ aralıklarına kısıtlanışı monoton olur.

Tanım : $f : X \to Y$ *fonksiyonu verilsin. Eğer,* $\forall x \in X$ *için* $x+T \in X$ *ve* $f(x+T) = f(x)$ *olacak şekilde bir* $T > 0$ *sayısı varsa* f *fonksiyonuna periyodik fonksiyon,* T *sayısına da* f *nin bir periyodu denir. Eğer, varsa periyodların en küçüğüne fonksiyonun esas (asli) periyodu denir.*

Örneğin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=c$ sabit fonksiyonu alınırsa $f(x+T)=f(x)$ koşulunu $\forall T>0$ sayısı sağlar. Yani $\mathbb{R}^+$-nın her elemanı bir periyottur ama esas periyot T_f yoktur.

$f(x) = x - [\![x]\!]$ olsun. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ için periyodik olup olmadığına bakalım. $f(x+T)=f(x) \Rightarrow$

$x+T-[\![x+T]\!] = x-[\![x]\!] \Rightarrow [\![x]\!]+T = [\![x+T]\!]$ olup tam-değer özelliği gereği $T\in\mathbb{Z}^+$ olmalıdır. Yani f periyodiktir. Esas periyot ise $T_f=1$ bulunur.

UYARI: Periyodik fonksiyonların grafikleri T_f büyüklüğündeki her aralıkta kendisini tekrar eder. Yani boyu T_f kadar olan bir aralıkta grafik çizilir ve diğer T_f uzunluğundaki aralıklara aynen geçirilir.

Bu uyarıya göre $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonk. grafiğini çizelim. $T_f = 1$ olduğundan boyu 1 br olan bir aralık alalım. Bu aralık $[0,1]$ olsun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0;\ x=1 \\ x, & 0<x<1 \end{cases}$$ olduğundan