LİMİT VE SÜREKLİLİK

Tanım: $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\delta > 0$ sayısı verilsin.

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a+\delta\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\}$$

kümesine a-nın δ komşuluğu denir. $a \in \mathbb{R}$ sayısına komşuluğun merkezi, δ- sayısına ise yarıçap denir.

$$\mathring{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a+\delta,\ x \neq a\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta\}$$

kümesine ise a-nın delik δ-komşuluğu denir.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}$ verilsin. $\forall \delta > 0$ sayısı için $\mathring{U}_\delta(a)$ kümesi A-nın en az bir elemanını içeriyorsa p-ye A-nın bir yığılma noktası denir ve $p \in A'$ ile gösterilir.

ÖR: $U_{\frac{1}{10}}(-2)$, $\mathring{U}_{\frac{1}{100}}\left(\frac{1}{3}\right)$ komşuluklarını bulalım.

$A = (-1, 1] \cup \{2, 3\}$ için $A' = ?$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $p \in A'$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonk. olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x-p| < \delta$ old.da $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. $\exists \delta : \delta(\varepsilon) > 0$ varsa $x \to p$ iken $f(x) \to L$ denir ve $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ ile gösterilir.

ÖR: $\lim\limits_{x \to 1} 2x - 5 = -3$ old. gösterelim.

$\lim\limits_{x \to -1} 3x + 4 = 1$ old. gösterelim.

Teorem: $A \subset \mathbb{R}$; $f, g: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A'$ olsun.
$\lim_{x \to p} f(x) = L$, $\lim_{x \to p} g(x) = M$ limitleri varsa

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ o.ü. $\lim_{x \to p} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot L$

(ii) $\lim_{x \to p} (f \mp g)(x) = \lim_{x \to p} [f(x) \mp g(x)] = L \mp M$

(iii) $\lim_{x \to p} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

(iv) $\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \frac{L}{M}$ $(M \neq 0)$.

(v) $f(x)$ bir polinom tipli fonksiyon ise
$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

(vi) $f(x), g(x)$ iki polinom tipli fonksiyon ve $g(p) \neq 0$ ise $\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(p)}{g(p)}$ dir.

ÖR:
$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3x + 5) = ?$

$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 4}{3x - 2} = ?$

Tanım:
$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall x > M = M_\varepsilon$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x \to +\infty$ iken $f(x) \to L$ denir ve $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ yazılır.

Benzer şekilde $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall x < M = M_\varepsilon$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ varsa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ yazılır.

ÖR: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ old. gösterelim.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ old. gösterelim.

Tanım:
$A\subset\mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$ ve $p\in A'$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $0<|x-p|<\delta$ old. da $f(x)>\varepsilon$ o.ş. bir $\delta: \delta(\varepsilon)>0$ varsa $x\to p$ iken $f(x)\to+\infty$ yazılır.
Benzer şekilde: $\forall\varepsilon>0$ için $0<|x-p|<\delta$ old. da $f(x)<-\varepsilon$ o.ş. $\exists\delta: \delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa $x\to p$ iken $f(x)\to-\infty$ yazılır ve sırasıyla

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to p} f(x) = -\infty$$

şeklinde yazılır.

Teorem (Sıkıştırma)
$A\subset\mathbb{R}$; $f,g,h: A\to\mathbb{R}$ ve $p\in A'$ olsun. $\forall x\in A$ için $f(x)\le g(x)\le h(x)$ ve $\lim_{x\to p} f(x) = L = \lim_{x\to p} h(x)$ ise $\lim_{x\to p} g(x) = L$ dir.

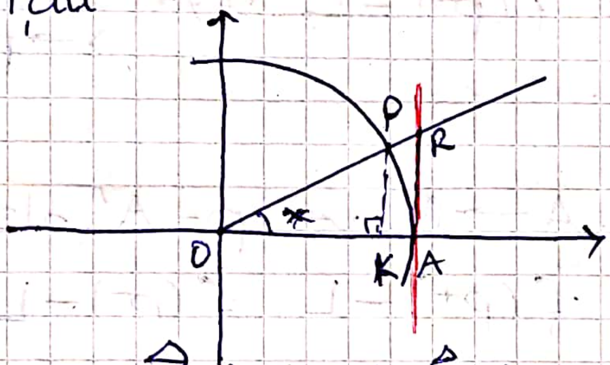
Belirsizlikler:
$\tilde{\mathbb{R}}$-da çalışırken limitte karşımıza çıkan $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ ve $\infty-\infty$ belirsizliklerini gidermek için eşleniğiyle çarpma, ortak çarpan parantezine alma, payda eşitleme, çarpanlara ayırıp sadeleştirme yöntemleri gibi yöntemler seçilir.

ÖR. $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x-3}{x+1}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-4}{-2x-3}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2x-7}{3x^2+2x-3}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-6}{4x^2-2x-1}$ limitlerini bulalım.

ÖR: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim. $\delta = \pi/2$ olmak üzere $0 < |x| < \pi/2$ komşuluğunu alalım

$0 < x < \pi/2$ için



$$A(\hat{POK}) < A(\hat{APO}) < A(\hat{ROA}) \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x . \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x . 1}{2} \Rightarrow$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$\dfrac{1}{\cos x} > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$ bulunur. $x \to 0$ iken limit alınırsa $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ olur.

$-\pi/2 < x < 0 \Rightarrow x = -u$ alalım. O zaman $0 < u < \pi/2$ olup

$$\frac{1}{\cos u} > \frac{\sin u}{u} > \cos u \Rightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{-\sin x}{-x} > \cos x \Rightarrow$$

$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ olur. Yani $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ dir.

ÖR: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ limitlerini bulunuz.

Sağ ve sol limitler

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in A'$ için f fonksiyonu $(p-\delta, p)$ ve $(p, p+\delta)$ komşuluklarında tanımlı olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $p-\delta_1 < x < p$ old. da $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ o.ş. $\exists \delta_1 : \delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa L_1 sayısına f-nin p noktasındaki sol limiti denir ve $f(p^-) = L_1$ veya $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

$\forall \varepsilon > 0$ için $p < x < p+\delta_2$ olduğunda $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ o.ş. $\exists \delta_2 : \delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa L_2 sayısına f-nin p-deki sağ limiti denir ve $f(p^+) = L_2$ veya $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A'$ olsun.

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff f(p^+) = L,\ f(p^-) = L \text{ dir.}$$

UYARI: Fonksiyonun tanımsızlık noktasında limit alınıyorsa veya mutlak değer, sign fonksiyonlarının içini sıfır yapan, tamdeğerin içini tamsayı yapan noktalarda limit alınıyorsa sağ ve sol limitlere bakılır.

ÖR: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{Sgn}(x-2)$, $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|+|x-4|}{|x-2|+|x+1|}$,

$\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} [\![\frac{3}{2}x+1]\!]$, $\lim\limits_{x\to -1} 2^{\frac{x}{x+1}}$ limitlerini bulalım.

Asimtotlar:

Bir fonksiyonun sonsuza uzanan bir kolu üzerindeki bir N noktasının bir doğruya veya eğriye olan uzaklığı N-nin sonsuza veya bir noktaya yaklaşması halinde 0 oluyorsa bu doğruya veya eğriye asimtot denir.

→ $y=f(x)$ fonksiyonu için $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

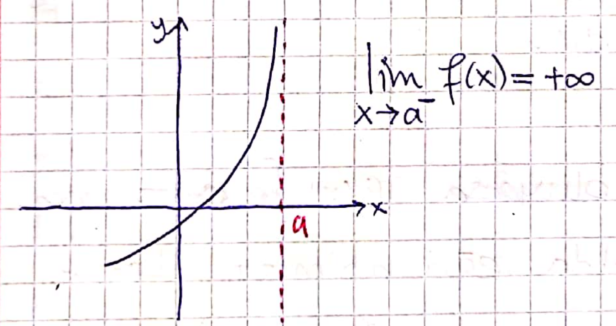
$\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $x=a$ doğrusuna sağdan düşey asimtot

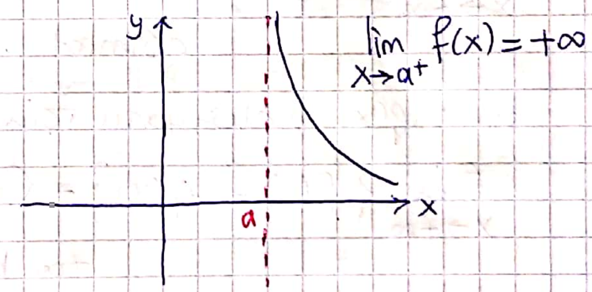
$\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $x=a$ doğrusuna soldan düşey asimtot

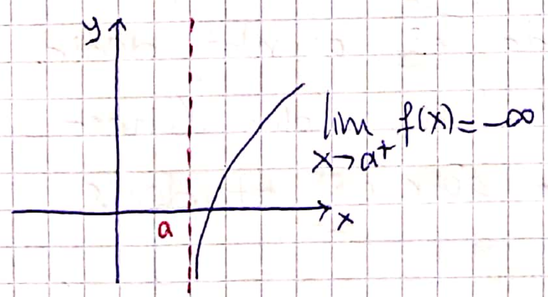
denir. Hem sağdan hem de soldan düşey asimtota kısaca düşey asimtot denir.

UYARI:

Düşey asimtot Df-de olmayan sayılabilir ayrık tekil noktalarda aranır. $Df=(a,b)$, $(-\infty,a]\cup(b,+\infty)$, ... gibi tanım kümeleri varsa sağdan ve soldan düşey asimtotlara dahil olmayan noktalarda bakılır.







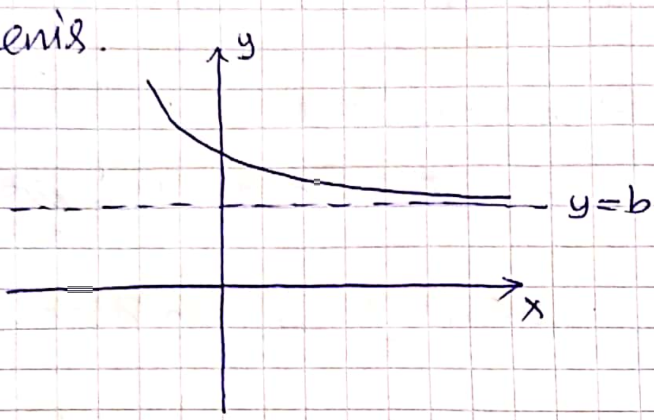
ÖR: $f(x)=\dfrac{x^2-x+7}{x^2-3x+2}$, $g(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ düşey asimtot varmıdır? $h(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ düş. asimtot varmıdır? $s(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

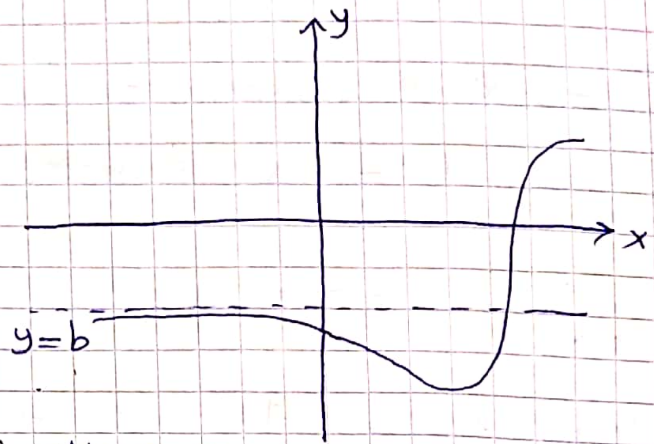
$y=f(x)$ fonksiyonu için D_f izin verdiği takdirde

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ise $y=b$ doğrusuna $+\infty$ kolda yatay asimtot

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ise $y=b$ 〃 $-\infty$ 〃 〃 〃

denir.





D_f tanım kümesinde $x\to\mp\infty$ limitlerine izin verilmiyorsa yatay asimtota bakılamaz.

$y=f(x)$ fonksiyonu için D_f izin vermesine rağmen

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\mp\infty$ ise $+\infty$ kolda yatay asimtot yoktur. Eğri asimtot vardır.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\mp\infty$ ise $-\infty$ kolda yatay asimtot yoktur. Eğri asimtot vardır.

Bir $\varphi_1(x)$ fonksiyonu için

$\lim\limits_{x\to+\infty} \{f(x)-\varphi_1(x)\}=0$ oluyorsa $\varphi_1(x)$ fonksiyonuna $+\infty$ kolda eğri asimtot denir.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \{f(x)-\varphi_2(x)\}=0$ oluyorsa $\varphi_2(x)$ fonksiyonuna $-\infty$ kolda eğri asimtot denir.

φ_1 veya φ_2 fonksiyonları 1. dereceden lineer bir doğru denklemi ise bunlara eğik asimtot denir.

NOT: Eğri asimtotu bulmak kolay değildir. Ama bazı durumlarda bulunabilirler.

(1) $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde ve $der(P) > der(Q)$ olsun. Polinom bölmesiyle $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ olduğunda $y=B(x)$ eğrisi hem $+\infty$ hemde $-\infty$ kolda eğri asimtot olur.

(2) $y=f(x)$ fonksiyonu için $+\infty$ veya $-\infty$ kolda $y=m_1x+n_1$ ve $y=m_2x+n_2$ eğik asimtotları varsa

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{ve} \quad n_1=\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-m_1\cdot x\},$$

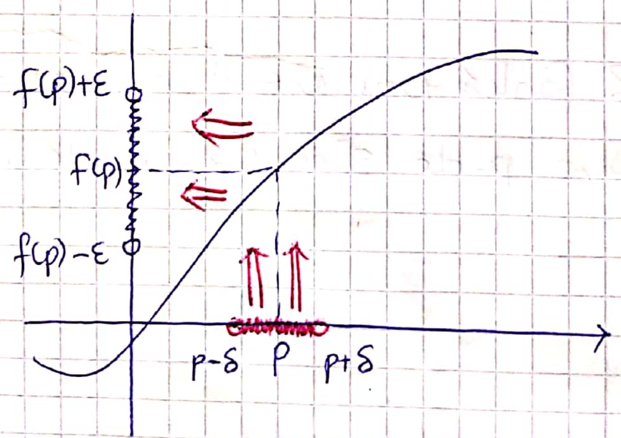
$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{ve} \quad n_2=\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-m_2\cdot x\} \text{ olur.}$$

ÖR: $f(x)=\frac{x^3+7x+12}{x+2}$, $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ asimtotlarını bulalım. $h(x)=x-1+\sqrt{x^2-3x-4}$ asimtot bul.

SÜREKLİLİK

$A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ ve $p\in A$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $|x-p|<\delta$ old. da $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ o.ş. $\exists\delta:\delta(\varepsilon)>0$ varsa f-ye $p\in A$ noktasında süreklidenir.

Eğer f, A-nın tüm elemanlarında sürekliyse f-ye A üzerinde süreklidir, denir.

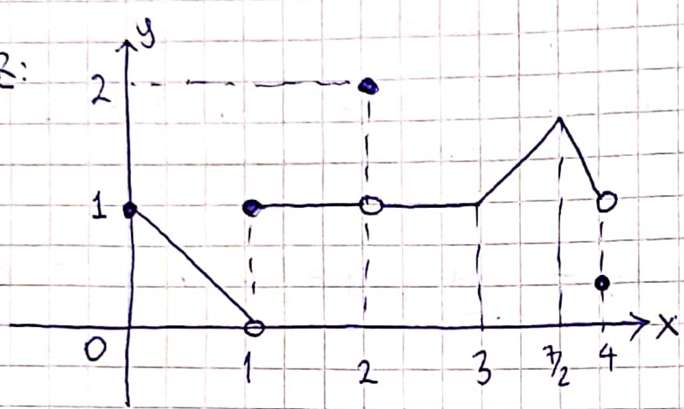


→ limit ve süreklilik arasındaki fark nedir?

Bu tanıma göre bir $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $p \in A$ noktasında sürekli olması için

- $f(p)$ var
- $\lim_{x \to p} f(x)$ var
- $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ olmalıdır.

ÖR: $f: [0,4] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu inceleyelim.



NOT: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için sürekliliğe bakarken a-ya soldan yaklaşamadığımızdan a noktasındaki süreklilik için sadece $f(a^+)$ limitine ve $f(a)$ değerine bakılır. Benzer şekilde b noktası için de $f(b^-)$ ve $f(b)$ değerlendirilir.

NOT: $f: A \to \mathbb{R}$, $p \in A$ ve p bir uç nokta olmasın.
$f(p^+) = f(p)$ ise f-ye p noktasında sağdan sürekli
$f(p^-) = f(p)$ ise " " " " soldan "
denir.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $p \in A$ noktasında sürekli değilse f-ye p-de süreksizdir, denir.

Scanned with CamScanner

Teorem:

(1) $f, g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $p \in A$ noktasında sürekli ise $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ fonksiyonlarında p noktasında süreklidirler. Eğer $g(p) \neq 0$ ise $\left(\frac{f}{g}\right)$ fonksiyonu da p noktasında süreklidir.

(2) $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekli, g ise $f(a)$ noktasında sürekli ise $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında süreklidir ve

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \text{ dir.}$$

UYARI:

Limitin bileşke fonksiyonun içine girebilmesi için fonksiyonların sürekli olması gerekir. Yani

$$\lim_{x \to a} (g \circ f \circ h)(x) = g\left(\lim_{x \to a} f \circ h(x)\right)$$

yazılabilmesi için g sürekli olmalıdır. Aynı işlem tekrar edilebilir.

ÖR:

$f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ sabit fonksiyonu $\mathbb{R}$-de süreklidir?

$f(x) = 3x+5$ fonksiyonu $p=-1$'de süreklimidir?

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-de süreklimidir?

$$f(x) = \begin{cases} ax+2b, & x \leq 0 \\ x^2+3a-b, & 0 < x \leq 2 \\ 3x-5, & x > 2 \end{cases}$$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-de sürekli olduğuna göre $a+b=?$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-de sürekli olduğuna göre $a+b=?$

SÜREKSİZLİK TÜRLERİ :

Bir fonksiyon $p \in D_f$ noktasında süreksiz ise aşağıdakiler gerçekleşebilir:

→ $f(p^+)$, $f(p^-)$ var ve $f(p^+) = f(p^-)$ ama $f(p)$ yok veya $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$ ise p noktasına kaldırılabilir süreksizlik noktası denir.

→ $f(p^+)$, $f(p^-)$ var ama $f(p^+) \neq f(p^-)$ ise sonlu sıçramalı süreksizlik noktası denir.

→ $f(p^+)$ veya $f(p^-)$ limitlerinin en az biri $\pm\infty$ ise sonsuz sıçramalı süreksizlik noktası denir.

ÖR: $f: (-1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^4-1}, & -1 < x < 2 \\ x^2+3x-2, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

fonksiyonunun süreksizliklerini inceleyiniz.

ÖR: $f(x) = \mathrm{Sgn}(x)$ inceleyiniz.

$g(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x \geq -1 \\ x+2, & x < -1 \end{cases}$ fonksiyonunu inceleyiniz.

UYARI: Bir fonksiyonun grafiğini elimizi kaldırmadan çizebiliyorsak o fonksiyon o aralıkta süreklidir. Grafikteki kopma, sıçrama noktaları varsa incelemek gerekir.

Sürekli fonksiyonların Özellikleri:

Teorem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x\in[a,b]$ için $m\leq f(x)\leq M$ o.ş. $m, M\in\mathbb{R}$ sayıları vardır. Yani f sınırlıdır.

Teorem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a)\cdot f(b)<0$ olsun. Bu durumda $f(c)=0$ o.ş. $\exists c\in(a,b)$ vardır.

ÖR: $f(x)=x^3-7x^2+x+11$, $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ için
$f(-2)=-8-28-2+11=-27$
$f(0)=11$ olup $f(-2)\cdot f(0)<0$ old. dan bu fonk.nun $(-2,0)$ aralığında en az bir kökü vardır.

Teorem (Ara-değer Teoremi):
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. O zaman $\forall y_0\in[f(a),f(b)]$ veya $[f(b),f(a)]$ için $f(x_0)=y_0$ o.ş. $\exists\, x_0\in[a,b]$ vardır.

ÖR: $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ için $f(0)=-1$, $f(2)=3$ olup $\forall y\in[-1,3]$ için $f(x_0)=y$ o.ş. $\exists x_0$ vardır.

ÖR: $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$ için
$f(-2)=0$, $f(2)=4$ olup $\forall y\in[0,4]$ için $f(p)=y$ o.ş. $\exists y\in[-2,2]$ vardır. Örneğin $y=2$ alınırsa

$$p^2+p-2=2 \Rightarrow p^2+p-4=0$$
$$\Rightarrow p=\frac{-1\mp\sqrt{17}}{2}$$ olup aranan p sayısı $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ dir.

Scanned with CamScanner