Belirli İntegralin Özellikleri :

TEOREM 2.f ve g fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebilirse, belirli integral aşağıdaki kuralları sağlar :

(1) İntegrasyon sırası :

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

(2) Sıfır genişlikli aralık :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(3) Sabitle çarpım : (k sabit)

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(4) Toplam ve Fark :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(5) Toplanabilirlik :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(6) Maksimum - Minimum eşitsizliği : Eğermaks f ve min f, f fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki maksimum ve minimum değerleri ise, o zaman

$$\min f \,.\, (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \text{maks}\, f.\,(b-a)$$

gerçekleşir.

(7) Baskınlık : $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, aynı zamanda $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ olur.

Kural (1) ve (2) tanım olarak alınır, diğerlerinin ispatı gerekir. Örnek olarak Kural (6) yıispatlayalım :

$$\min f\,.\,(b-a) = \min f\,.\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\min f\,.\,\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\text{maks}\, f\,.\,\Delta x_k = \text{maks}\, f\,.\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \text{maks}\, f.\,(b-a)$$

Yani f fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki tüm Riemann toplamları şu eşitsizliği sağlar :

$$\min f\,.\,(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq \text{maks}\, f.\,(b-a)$$

O halde Riemann toplamlarının limitleri, yani integral de bu eşitsizliği sağlar.

ÖRNEK 2.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)dx = -2, \qquad \int_{-1}^{1} g(x)dx = 7$$

ise

(1)

$$\int_{4}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{4} f(x)dx = -(-2) = 2.$$

(2)

$$\int_{-1}^{1}[2f(x)+3g(x)]dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} g(x)dx = 2.5 + 3.7 = 31.$$

(3)

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = 5 + (-2) = 3.$$

ÖRNEK 3.

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx \leq 2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Maksimum - minimum kuralını kullanalım :

$f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ fonksiyonunun $[0,1]$ kapalı aralığındaki maksimum değeri :

$$\text{maks } f = \sqrt{1+\cos 0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

O halde

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx \leq 2$$

olur.

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse $a \leq x \leq b$ olmak üzere $[a,x]$ aralığında da integrallenebilirdir. Böylece $a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$F:[a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

biçiminde integral ile tanımlı fonksiyonundan sözedilebilir. Bu integral $a \leq x \leq b$ olmak üzere bir üst sınır olan x değişkeninin fonksiyonudur. Bu fonksiyonun türevi aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem(İntegral Hesabın Birinci Teoremi). $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere bir $\mathrm{F}:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde F fonksiyonu diferansiyellenebilirdir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

Teorem(İntegralin türevi -Leibniz Teoremi):

u, v fonsiyonları $[a, b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ve f fonksiyonu da integrallenebilir olsun. Bu taktirde

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

fonksiyonutürevlenebilirdir ve türevi

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

dir.

Örnek: $F(x) = \int_{x}^{x^2} \sin(t^2)dt \Rightarrow F'(x) = ?$

Örnek: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt = ?$

TEOREM (İntegral Hesabın İkinci Temel Teoremi): f fonksiyonu [a, b] aralığının her noktasında surekli ve F'de f 'nin [a, b] aralığındaki herhangi bir ters türevi (İlkel Fonksiyonu) ise

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

olur.

Örnek:

$$\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

TEOREM (Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi)

f, [*a, b*] aralığında surekli ise [*a, b*] icindeki bir *c* noktasında

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olur.

Örnek: $f(x) = 3 - \cos x$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığındaki ortalama değeri nedir.

Örnek: Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 br olan bir dairesel dik koni tepesinden y br uzakta tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

Teorem (Değişken Değiştirme):

g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyon ve f fonksiyonu da integrallenebilir olsun. $g(x)=u$ için

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

olur.

NOT: integral, değişken değiştirme yöntemiyle hesaplanacaksa değişkenler değiştirilirken eski değişkene dönülmek istenmiyorsa integrasyon sınırlarını da değiştirmek gerekir.

Örnek: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = ?$

$\sin x = u \quad \cos x dx = du$

$x = 0 \ , u = \sin 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \ , u = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan u\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Örnek: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = ?$

Teorem(Kısmi İntegrasyon):

f, g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

dir.

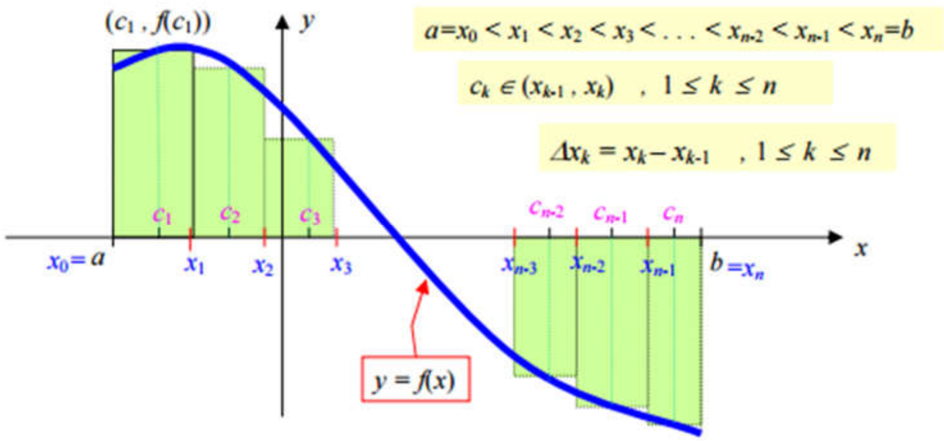
Örnek: $\int_0^{\pi} x\cos x dx = ?$

$x = u \quad , \cos x dx = dv$ denilirse
$dx = du , \quad v = \sin x$
olur.

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \pi \sin \pi - 0 \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

Belirli İntegral Yardımıyla Alan Hesabı

1) $f(x)$fonksiyonu$[a,b]$ kapalı aralığında pozitif, sürekli ve grafiğinin aşağıdaki şekilde olduğunu kabul edelim.



$x_0 = a, x_n = b$, x-ekseni ve $y = f(x)$ fonksiyonu ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayalım. Bahsedilen alan A olsun. $[a,b]$ aralığının düzgün parçalanışı $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Bu durumda $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$ olur. Şekildeki dikdöretgenlerin alanları toplamı belirtilen şeklin yaklaşık alanını verir.

$x_0 \le c_1 \le x_1, x_1 \le c_2 \le x_2, \ \dots \ , x_{n-1} \le c_n \le x_n$ olacak şekildeki c_1, c_2, … , c_n noktaları alınırsa dikdörtgenlerin alanları toplamı

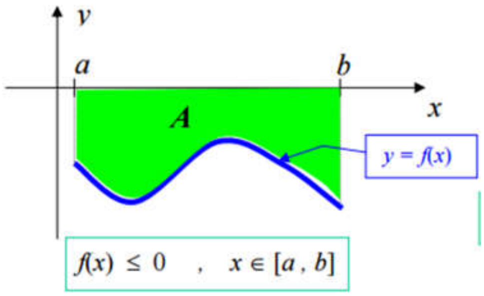
$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \approx A$$

Bu ise $[a,b]$ aralığının n-eşit alt aralığa bölünmesi ve bu aralıklardan z_i noktalarının alınmasıyla elde edilen Riemann toplamıdır. Buna göre istenilen alan

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx$$

dir.

2) Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0$ olsun.



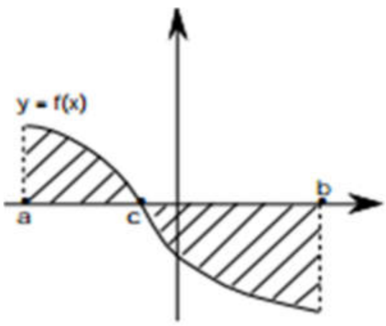
Bu durumda $[a, b]$ nin bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı için dikdörtgen alanları $i = 1, 2, \dots, n$ için $-f(z_i)\Delta x_i$ olduğundan Riemann teorisine göre A nın gerçek değeri

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} -f(z_i)\Delta x_i$$

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

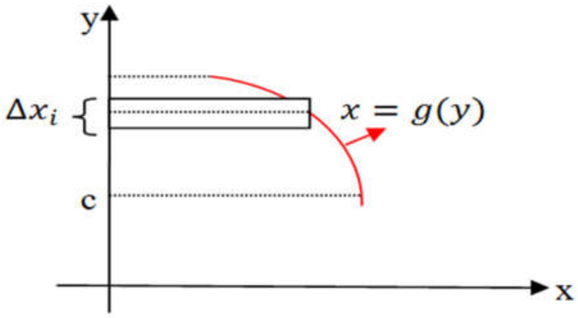
olur.

3) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının bazı yerlerinde pozitif bazı yerlerinde negatif ise fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı hesaplanarak toplanır.



$$A = \int_a^c f(x)\, dx + \left| \int_c^b f(x)\, dx \right|$$

4) Benzer şekilde, $x = g(y)$ eğrisi y-ekseni ve $y = c, y = d$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanı A olmak üzere



$$A = \int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d x\,dy$$

SONUÇ:

1)$y = f(x)$ eğrisi $x = a,\ x = b$ ve ox-ekseni arasında kalan bölgenin alanı,

$$A = \int_a^b |y|\,dx$$

2)$x = g(y)$ eğrisi $y = c,\ y = d$ doğruları ve oy-ekseni arasında kalan bölgenin alanı,

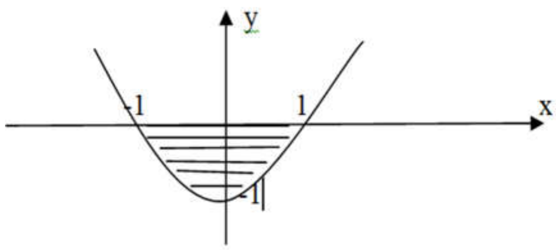
$$A = \int_c^d |x\,|dy$$

dir.

NOT:Eğer alan x-ekseninin altında veya y-ekseninin solunda ise bulunan sonucun mutlak değeri alınır. Dikdörtgen hangi eksene dik ise integral ve sınırlar o eksene göre alınmalıdır.

Örnek:$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

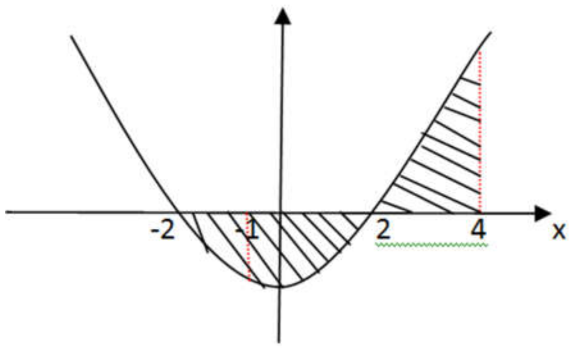
Çözüm: $x^2 - 1 = 0,\ x = \mp 1$



$$A = \int_{-1}^{1} |x^2 - 1|\, dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x \right)\Big|_{-1}^{1} \right| = \frac{4}{3}$$

Örnek: $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği x-ekseni ve $x = -1, x = 4$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

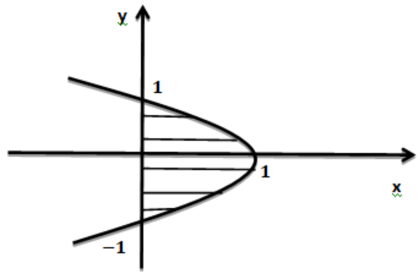


f fonksiyonu $(-1, 2)$ aralığında negatif $(2, 4)$ aralığında ise pozitif tanımlıdır.

$$A = \int_{-1}^{2} |x^2 - 4|\, dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 4)\, dx = 9 + \frac{32}{3} = \frac{59}{3}$$

Örnek: $x = 1 - y^2$ parabolü ile y-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

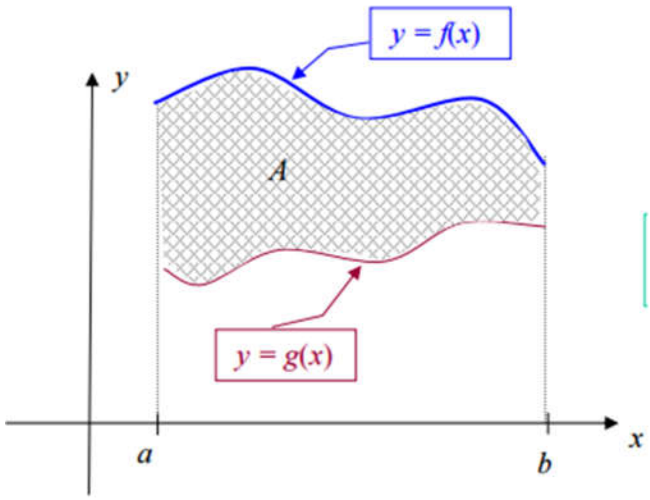
Çözüm:



$$A = \int_{-1}^{1} (1 - y^2)dy = \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

İki Eğrinin Sınırladığı Bölgenin Alanı

$y = f(x),\ y = g(x)$eğrileri ile $x = a,\ x = b$ doğrularının sınırladığı alan A olsun.



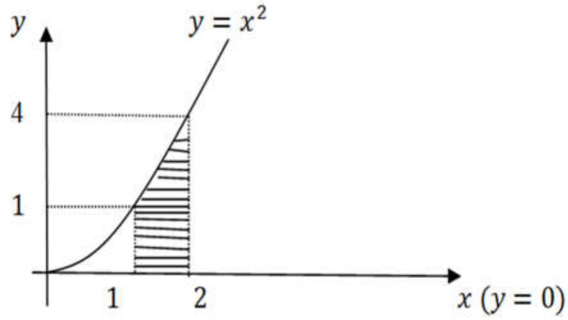
$f(x) > g(x)$olmak üzere alınacak dikdörtgenlerin yükseklikleri $h(z_i) = f(z_i) - g(z_i)$ olacağından istenen alan

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

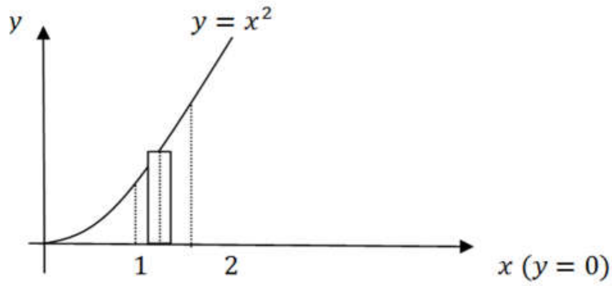
dir.

<u>NOT</u>:İntegral bölgesinde düşey şeridin üst ve alt uçlarının (yatay şerit ile çalışılıyorsa sağ ve sol uçlarının) dayandığı eğriler aynı olmalıdır. Bu durumda istenen alan bir tek integral ile hesaplanabilir. Şeritlerin uçlarının dayandığı eğriler aynı değilse bölge bu özelliği gerçekleyecek şekilde alt bölgelere ayrılmalıdır. Alt bölgeler üzerinden integrallerin toplamı alınarak istenen alan bulunabilir.

<u>Örnek</u>:$y = x^2,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

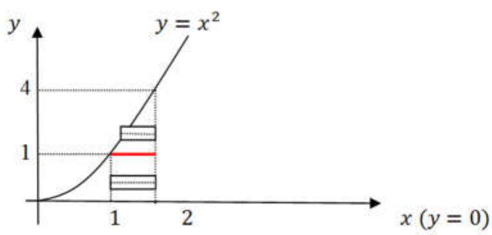


1) Bölgeyi düşey şeritle tarayalım.



$$A = \int_1^2 y\,dx = \int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{3}\ br^2$$

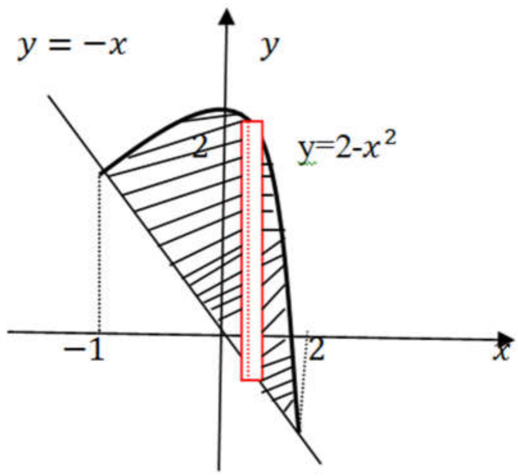
2) Bölgeyi yatay şeritle tarayalım.



$$A = \int_0^1 (2-1)\,dy + \int_1^4 (2-\sqrt{y})dy = y\Big|_0^1 + \left(2y - \frac{2}{3}y^{3/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{3}\ br^2$$

Örnek: $y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

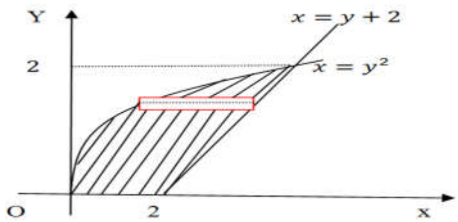
$$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$



$$A = \int_{-1}^{2} \big((2-x^2)-(-x)\big)dx = \frac{9}{2}$$

Örnek:$y=\sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $y-x+2=0$ doğrusunun birinci bölgede sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

$y^2 = y+2$ise$y^2-y-2=0$ olup $(y-2)(y+1)=0$ dan $y=2$



$$A = \int_{0}^{2} \big((y+2)-y^2\big)dy = \left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}\ br^2$$

Örnek:$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ve $f(x)=\frac{x^2}{2}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

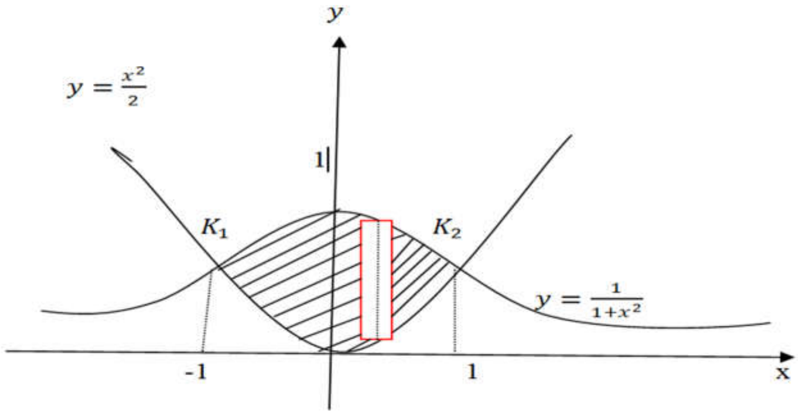
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $D_f=(-\infty,\infty)$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$, $y=0$ yatay asimptod.

$y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ olmak üzere $y'=0$ için $x=0$dır.

x	$-\infty$		0		$-\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow (x^2+2)(x^2-1) = 0 \Longrightarrow x =$
± 1için$K_1 = (-1, \frac{1}{2})$ ve $K_2 = (1, \frac{1}{2})$ kesim noktaları olmak üzere



$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left(arctanx - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \qquad 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi - 2}{6}$$

Eğri Denklemlerinin Parametrik Olarak Verilmesi Durumunda Alan Hesabı

Parametrik denklemi $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ olan bir C eğrisi $x = a, x = b$ doğruları ile x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayalım:

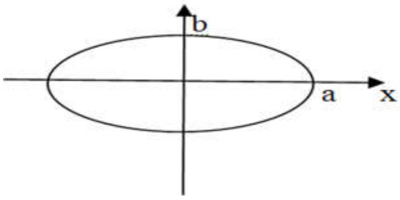
$y = f(x)$eğrisi, $x = a, x = b$ doğruları ile x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı A olmak üzere $A = \int_a^b y\, dx$ olduğunu biliyoruz. Bu integrali t cinsinden ifade edelim.

$$x = g(t) \Longrightarrow dx = g'(t)dt \Longrightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} h(t)g'(t)dt$$

Olur. Burada t_1, t_2; t nin $x = a, x = b$ ye karşılık gelen değeridir.

<u>Örnek</u>$\begin{cases} x = \mathrm{a}\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen elipsin alanını bulunuz.

Önce elipsin dörtte birinin alanını bulalım.



$x = 0 \Longrightarrow \mathrm{t} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere
$y = a \Longrightarrow \mathrm{t} = 0$

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsint(-asint)\, dt = 4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -sin^2t\, dt = 4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{cos2x - 1}{2}\, dx$$